This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

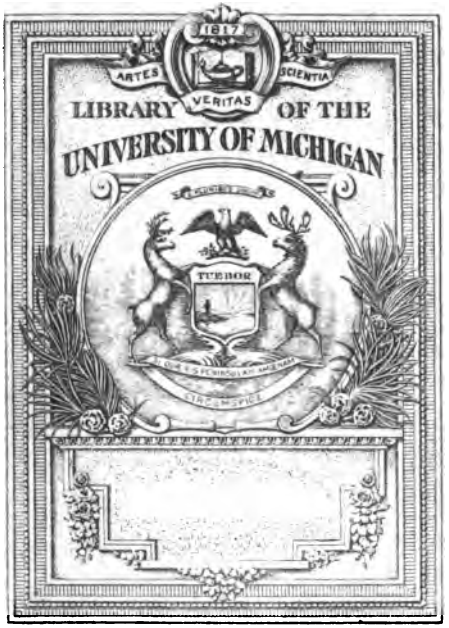
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

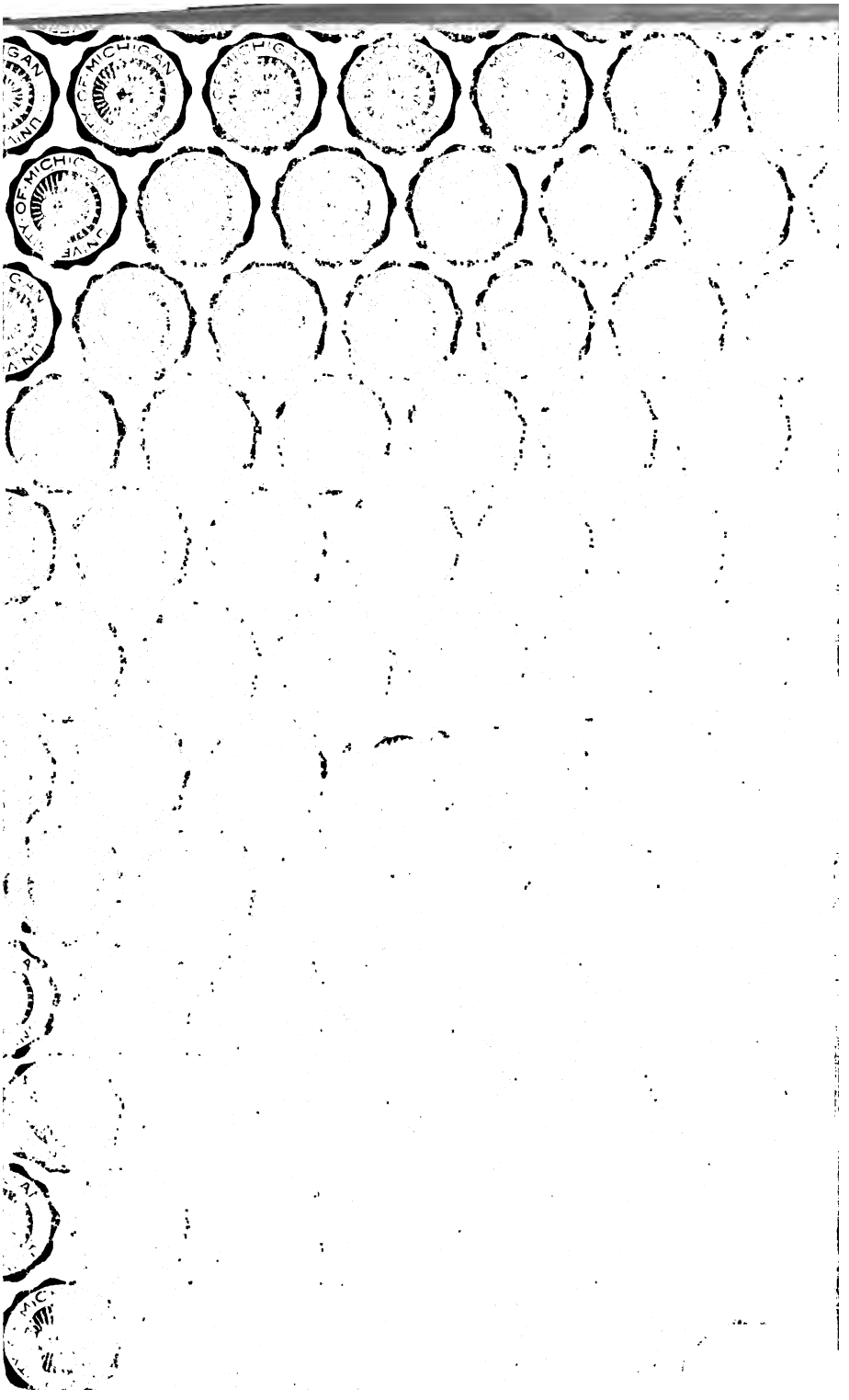
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



QA
37
.T2

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

QA
37
.T26

LEÇONS

ÉLÉMENTAIRES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME PARTIE.

Contenant un Supplément aux Élémens d'Algèbre, l'application de l'Algèbre à la Géométrie, et les principes du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral;

Par P. TEDENAT,

Associé de l'Institut national de France, Professeur de Mathématiques à l'Ecole centrale du Département de l'Aveyron.

TOME SECOND.

A RODEZ, CHEZ L'AUTEUR;

Et à PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN X — 1801.

Lib. Com. Naglione
1-1128
6615

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

DE

MATHÉMATIQUES.

ANALYSE INFINITÉSIMALE.

236. L'ANALYSE infinitésimale, née au milieu de la Métaphysique et de la Géométrie, a porté long-temps l'empreinte de son origine : de-là les variations qu'elle a éprouvées dans l'exposition de ses principes, et les formes différentes qu'elle a prises entre les mains de Leibnitz, sous le nom de Calcul Différentiel ; de Newton, sous le nom de Calcul des Fluxions ; d'Euler, sous celui de Calcul des Quantités Evanouissantes ; de Maclaurin et d'Alembert, sous le nom de Méthode des Limites. Lagrange a fixé les vrais élémens de cette analyse, en liant immédiatement les nouveaux Calculs à l'Algèbre, et en les faisant dépendre uniquement du développement en série des fonctions analytiques.

L'objet principal que nous nous proposons est de faire connoître ces différentes méthodes, de les comparer avec celle de Lagrange, et de démontrer qu'il n'y a point de différence essentielle entre le Calcul différentiel, la Méthode des Fluxions, celle des quantités Evanouissantes, la Théorie des Limites et celle des Fonctions analytiques ; mais avant tout, nous ferons connoître la Méthode des Différences qui sert de base au Calcul Différentiel.

MÉTHODE DES DIFFÉRENCES.

CHAPITRE PREMIER.

Calcul direct des différences.

237. PARMI les grandeurs ou quantités que l'on compare entr'elles, et qui sont liées par une même équation, les unes peuvent augmenter ou diminuer continuellement, tandis que les autres demeurent toujours les mêmes. Par exemple, dans un cercle dont l'équation est

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

le rayon a est constant, les abscisses x et les ordonnées y varient d'un point de la courbe à l'autre; les unes sont appelées quantités constantes, et les autres quantités variables: on désigne ordinairement les constantes par les premières lettres de l'alphabet $a, b, c, \ldots$ et les variables par les dernières lettres x, y, z, comme on l'a vu (235).

La quantité dont une variable augmente ou diminue, en passant de son état actuel à un autre, en est appelée la différence; et cette différence se désigne ordinairement par la lettre grecque Δ, placée au-devant de la variable: ainsi pour désigner la différence de x, on écrira Δx, qui sera précédé du signe $+$ ou du signe $-$, selon que la variable sera supposée croître ou décroître: la différence de y sera $\pm \Delta y$;

celle de z sera $\pm \Delta z$... &c.

Cette manière de désigner les différences des variables indique les quantités dont elles tirent leur origine, la lettre Δ représentant l'abréviation du mot *différence*.

238. Il suit des notions déjà posées, que pour avoir la différence d'une fonction algébrique il faut supposer que la variable, ou les variables qu'elle contient, prennent un accroissement représenté par $\Delta x, \Delta y$... &c. on retranchera ensuite la fonction primitive de la fonction variée, et ce qui restera sera la différence de la fonction proposée: ainsi pour avoir la différence de $F.x$, on écrira

$$F(x+\Delta x) - F.x.$$

Soit une équation entre deux variables x, y séparées l'une de l'autre, qu'on pourra mettre par conséquent sous la forme $y = F.x$; on la nommera *fonction primitive*: si on suppose que x recevant un accroissement représenté par Δx, l'accroissement correspondant de y soit Δy, on aura l'équation variée

$$y + \Delta y = F(x+\Delta x),$$

qu'on appellera *fonction variée*: si on retranche la première de la seconde, on aura

$$\Delta y = F(x+\Delta x) - Fx.$$

Ce sera la *fonction différence* qui déterminera le rapport de $\Delta y : \Delta x$.

Si l'équation entre les deux variables étoit une fonction implicite, c'est-à-dire telle qu'on ne peut pas avoir la valeur de y en x, ou réciproquement, on la désigneroit par

$$F(x.y) = 0,$$

la fonction variée seroit

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0,$$

et la fonction différence seroit

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0.$$

239. Les équations

$$y=F.x, \text{ ou } F(x,y)=0$$

expriment les rapports entre les ordonnées et les abscisses d'une courbe : si l'on suppose que l'abscisse $AP=x$ reçoit un accroissement fini $PP'=\Delta x$ et devient AP', que nous représenterons par x', ou $x+\Delta x$, l'ordonnée $PM=y$ deviendra

Fig. 51.

$$P'M'=PR+RM'=y+\Delta y;$$

on aura donc

$$y+\Delta y=F(x+\Delta x).$$

Si on développe en série le second membre, d'après la méthode du n°. (89), en mettant Δx à la place de k, on aura

$$y+\Delta y=Fx+\Delta x F'.x+\frac{\Delta x^2}{2}F''.x+\frac{\Delta x^3}{2.3}F'''.x+\text{... \&c.}$$

mais

$$y=F.x;$$

donc on aura pour la fonction différence

$$\Delta y=\Delta x F'.x+\frac{\overline{\Delta x}^2}{2}F''x+\frac{\overline{\Delta x}^3}{2.3}F'''.x+\text{... \&c.}$$

Toute fonction algébrique et rationnelle de x, sans diviseur variable, est toujours composée de termes de la forme $A x^k$: ainsi le calcul des différences d'une pareille fonction se réduit à trouver celle des quantités de la forme $A x^k$.

Soit $y = A x^k \ldots$ on aura

$$y + \Delta y = A (x + \Delta x)^k,$$

et $$\Delta y = A (x + \Delta x)^k - A x^k \ldots$$

Le nombre des termes de ce binome sera toujours fini lorsque k sera un nombre entier positif.

Soit pour exemple l'équation

$$y = \frac{2ax - x^2}{b} \ldots$$

on aura

$$y + \Delta y = \frac{2a(x + \Delta x)}{b} - \frac{(x + \Delta x)^2}{b}$$

$$= \frac{2ax - x^2}{b} + \frac{2a\Delta x - 2x\Delta x - \Delta x^2}{b};$$

donc $$\Delta y = \left(\frac{2a - 2x - \Delta x}{b}\right) \Delta x.$$

Si l'exposant k est négatif ou fractionnaire, les fonctions différences sont données par des séries qui ne se terminent pas.

Prenons pour exemple la fonction $y = \frac{1}{x}$, on a

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{x^2} + \frac{\Delta x^2}{x^3} - \frac{\Delta x^3}{x^4} + \frac{\Delta x^4}{x^5} \ldots \text{ \&c.}$$

donc $$\Delta y = -\frac{\Delta x}{x^2} + \frac{\Delta x^2}{x^3} - \frac{\Delta x^3}{x^4} + \ldots$$

Soit la fonction irrationnelle $y = \sqrt{x} \ldots$ on aura

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} = (x + \Delta x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} - \frac{\Delta x^2}{8\sqrt{x^3}} + \frac{\Delta x^4}{16\sqrt{x^5}} \ldots$$

240. Sans multiplier davantage les exemples, on doit voir par tout ce que nous venons de dire, et par tout ce qui a été dit plus en détail (82), qu'on pourra toujours représenter la différence d'une fonction algébrique de x, et de constantes, par une suite de termes ordonnés selon les puissances de Δx : si la fonction est rationnelle et sans diviseur variable, la série sera composée d'un nombre fini de termes; si la fonction est fractionnaire ou irrationnelle, le nombre des termes de la série sera infini.

241. Si l'on a l'équation

$$F(x,y)=0,$$

sa fonction différence sera

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0,$$

comme on l'a déjà dit (238).

Soit pris pour exemple l'équation générale du second degré,

$$y^2+ax^2+bxy+cx+dy+f=0;$$

sa fonction différence sera

$$(2y+bx+d)\Delta y+(2a.x+by+c)\Delta x$$
$$+\Delta y^2+a\Delta x^2+b\Delta x\Delta y=0.$$

Soit une fonction à trois variables, représentée par l'équation

$$z=F(x,y).$$

Lorsque x devient $x+\Delta x$, et $y, y+\Delta y$, z devient $z+\Delta z$; ainsi la fonction variée sera

$$z+\Delta z=F(x+\Delta x, y+\Delta y).$$

Si l'on met dans le n°. (99) Δx à la place de k, et Δy à la place de 0, on aura

$$z+\Delta z=z+\Delta x\left(\frac{z'}{x}\right)+\Delta y\left(\frac{z'}{y}\right)+\frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{z''}{x^2}\right)$$

$$+\Delta x\,\Delta y\left(\frac{z''}{xy}\right)+\frac{\Delta y^2}{2}\left(\frac{z''}{y^2}\right)\ldots.$$

donc

$$\Delta z=\Delta x.\left(\frac{z'}{x}\right)+\Delta y\left(\frac{z'}{y}\right)+\frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{z''}{x^2}\right)$$

$$+\Delta x\,\Delta y\left(\frac{z''}{xy}\right)+\frac{\Delta y^2}{2}\left(\frac{z''}{y^2}\right)\ldots.$$

Soit pour exemple $z=axy\ldots$ on aura

$$z+\Delta z=a(x+\Delta x)(y+\Delta y),$$

et $$\Delta z=a(y\,\Delta x+x\,\Delta y+\Delta x\,\Delta y).$$

Soit $z=\frac{x}{y}\ldots$ on a

$$z+\Delta z=\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}\text{ et }\Delta z=\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{x}{y}=\frac{y\Delta x-x\Delta y}{y^2+y\Delta y}$$

$$\frac{y\,\Delta x-x\,\Delta y}{y^2}\left\{1-\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta y^2}{y^2}-\frac{\Delta y^3}{y^3}+\ldots\right\}$$

242. Il suit de tout ce qu'on vient de dire, que si on a une équation composée d'autant de variables qu'on voudra, représentée par $z=F.(x,y,u\ldots\&c.)$ on aura la différence en écrivant

$$\Delta z=F(x+\Delta x,y+\Delta y,u+\Delta u\ldots)-F(x,y,u\ldots)$$

On fera ensuite les développemens convenables, ce qui ne peut souffrir aucune difficulté d'après les principes expliqués (92) et suivans; mais il est souvent plus commode de chercher directement cette différence dans chaque fonction particulière, que de la déduire d'une formule générale.

De la différence des fonctions d'une seule variable, composées de facteurs en progression arithmétique.

243. Soit z une fonction de x composée de facteurs en progression arithmétique, tels que

$$x.x+\omega...x.x+\omega.x+2\omega...x.x+\omega.x+2\omega.x+3\omega...$$

ω étant l'accroissement de x, correspondant à l'accroissement Δz; c'est la quantité représentée généralement par Δx; mais qu'on désigne ici pour plus de simplicité par un signe particulier : on aura donc

1°. Lorsque $z = x.x + \omega...$,

$$\Delta z = x+\omega.x+2\omega.-x.x+\omega = 2\omega.x+\omega.$$

2°. Lorsque $z = x.x + \omega.x + 2\omega,...$

$$\Delta z = x+\omega.x+2\omega.x+3\omega-x.x+\omega.x. + 2\omega = 3\omega.x+\omega.x+2\omega$$

3°. Lorsque $z = x.x+\omega.x+2\omega.x+3\omega.$

$$\Delta z = x+\omega.x+2\omega.x+3\omega.x+4\omega. - x.x+\omega.x+2\omega.x+3\omega = 4\omega.x+\omega.x+2\omega.x+3\omega.$$

4°. Lorsque $z = x.x+\omega.x+2\omega.x+3\omega...x+n-1\omega$, on aura

$$\Delta z = x+\omega.x+2\omega...x+n\omega-x.x + \omega.x+2\omega.x+3\omega...x+n-1\omega. = n\omega.x+\omega.x+2\omega.x+3\omega...x+n-1.\omega;$$

si la fonction dont on cherche la différence étoit

$$z=(x+a)(x+a+\omega)(x+a+2\omega)(x+a+3\omega)(...x+a+n-1\omega)$$

on feroit $x + a = y$,

et comme la différence de $x + a$ est la même que celle de x, on voit que la différence de cette dernière fonction rentre dans la précédente :

On aura donc facilement, et sans calcul, la différence d'une fonction d'une variable, composée d'autant de facteurs qu'on voudra croissant en progression arithmétique, lorsque la différence de la progression sera la même que celle de la variable : si la différence de la progression n'est pas la même que celle de la variable, il faudra chercher à transformer la fonction en une autre, dont les facteurs croissent en progression arithmétique, ayant pour différence la différence même de la variable.

244. Soit

$$z = x.x+a.x+2a.x+3a.x+4a...x+n-1a;$$

a étant une constante indéterminée, différente de ω : on substituera à la place de x, une autre variable y; en supposant $x = \frac{ay}{\omega}$.. par cette substitution, le facteur $x + a$ deviendra

$$\frac{a}{\omega}(y+\omega),$$

le facteur $x + n - 1.a$, deviendra

$$\frac{a}{\omega}(y+n-1.\omega).$$

donc on aura

$$z = \frac{a^n}{\omega^n}(y.y+\omega.y+2\omega.y+3\omega...y+n-1\omega),$$

et par conséquent

$$\Delta z = \frac{n\,a^n}{\omega^{n-1}}(y+\omega.y+2\omega.y+3\omega..y+n-1.\omega);$$

d'où il suit que si on a deux courbes différentes, dont les équations soient

$$Z = F.x \ldots Z = F.\frac{ay}{\omega},$$

les valeurs des ordonnées successives $Z', Z'', Z'''\ldots$ dans la première courbe seront identiques avec celles de la seconde courbe, pourvu que dans la première, les ordonnées soient distantes entr'elles d'une quantité constante $= a$, et dans la seconde, d'une autre quantité constante $= \omega$: on pourra donc, dans toutes les équations où Δx est une quantité constante a, autre que l'unité, introduire une autre variable y, dont la différence soit 1, en faisant

$$x = ay :$$

nous pourrons donc supposer dans la suite que l'accroissement de la variable est égal à l'unité, sans que cette supposition limite la généralité des résultats.

245. Supposons que la fonction dont on cherche la différence, est une fraction dont le numérateur est constant, et le dénominateur est le produit de plusieurs facteurs en progression arithmétique, ayant pour différence commune la différence même de la variable :

Soit cette différence $= 1$, on aura

1°. Lorsque $z = \frac{a}{x} \ldots$

$$\Delta z = \frac{a}{x+1} - \frac{a}{x} = \frac{-a}{x.x+1}$$

2°. Lorsque $z = \frac{a}{x.x+1} \ldots$

$$\Delta z = \frac{a}{x.x+1} - \frac{a}{x+1.x+2} = \frac{-2a}{x.x+1.x+2}$$

3°. Lorsque $z = \frac{a}{x+1.x+1.x+2} \ldots$

$$\Delta z = \frac{a}{x+1.x+2.x+3} - \frac{a}{x.x+1.x+2}.$$

$$= \frac{-3a}{x.x+1.x+2.x+3}$$

4°. Lorsque $z = \frac{a}{x.x+1.x+2 \ldots x+n-1} \ldots$

$$\Delta z = \frac{-na}{x.x+1.x+2 \ldots x+n}.$$

On peut donc établir les deux règles suivantes pour prendre la différence d'une fonction algébrique composée de facteurs en progression arithmétique.

Règle Ire.

246. *Etant donné un produit de la forme*

$$x.x+\omega.x+2\omega.x+3\omega \ldots x+n-1\omega,$$

on obtiendra la différence, en substituant au premier facteur x, le produit n ω, et conservant les autres facteurs tels qu'ils sont, n désignant le nombre des facteurs du produit.

Règle IIe.

Etant donnée une fraction de la forme

$$\frac{A}{x.x+\omega.x+2\omega.x+3\omega \ldots x+n-1.\omega}$$

on obtiendra la différence, en la multipliant par

le produit négatif $-n\omega$, *et augmentant le dénominateur d'un facteur.*

Soit à présent une fraction quelconque dont le dénominateur est le produit de plusieurs facteurs simples, le numérateur étant constant ou variable. Avant d'en prendre la différence, on la décomposera en autant de fractions partielles qu'elle a de facteurs simples à son dénominateur; on prendra ensuite la différence de chaque fraction simple, et la somme des différences de toutes les fractions partielles sera la différence cherchée.

Soit pour exemple

$$z = \frac{A}{(x+a)(x+b)};$$

en décomposant la fraction, d'après la méthode connue (*Algèb.* 127), on a

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{M}{x+a} + \frac{N}{x+b},$$

réduisant les deux fractions partielles au même dénominateur, et comparant ensuite les numérateurs, on trouve

$$M = \frac{1}{b-a} \ldots N = \frac{b-a}{-1} \ldots$$

on aura donc

$$\Delta z = \frac{A}{b-a}\left(\Delta.\frac{1}{x+a} - \Delta.\frac{1}{x+b}\right)$$

$$= \frac{A\,\Delta x}{b-a}\left(\frac{1}{x+b.x+b+\Delta x} - \frac{1}{x+a.x+a+\Delta x}\right)$$

Différences

Différences secondes et troisièmes des fonctions algébriques.

247. Si on suppose que l'abscisse $AP' = x + \Delta x$ augmente encore d'une quantité $P'P'' = \Delta x$, et devienne par conséquent $AP'' = x + 2\Delta x$, l'ordonnée correspondante $P''M''$, que nous désignerons par y'', égalera Fig. 51.

$$P''R' + R'M'', \text{ ou } y' + \Delta y';$$

en désignant $R'M''$ par $\Delta y'$: si par le point MM', on mène la sécante $MM'Q$, il est visible que l'on aura

$$R'Q = RM'$$

et par conséquent

$$QM'' = \Delta y' - \Delta y.$$

La différence qui règne entre les deux différences $\Delta y'$, et Δy, est appelée la différence seconde de l'ordonnée $PM = y$, et l'on voit qu'elle est égale à la partie QM'' de l'ordonnée $P''M''$, comprise entre la courbe et la sécante $MM'Q$.

On désigne les différences secondes d'une manière abrégée, en substituant l'indice Δ^2 au signe Δ; c'est-à-dire en faisant

$$\Delta y' - \Delta y = \Delta^2 y \ldots \Delta y'' - \Delta y' = \Delta^2 y' \ldots$$
$$\Delta y''' - \Delta y'' = \Delta^2 y'' \ldots \text{ etc.}$$

Si l'on a deux différences secondes consécutives, telles que $\Delta^2 y'$, $\Delta^2 y$, et qu'on retranche la seconde de la première, on aura la différence troisième de y, qu'on désignera par $\Delta^3 y$, c'est-à-dire que

$$\Delta^2 y' - \Delta^2 y = \Delta^3 y \ldots \Delta^2 y'' - \Delta^2 y' = \Delta^3 y' \ldots$$
$$\Delta^2 y''' - \Delta^2 y'' = \Delta^3 y'' \ldots \text{ etc.}$$

Fig. 52. 248. Si l'on a une suite d'ordonnées y, y', y'', $y'''\ldots y^{(n)}$ appartenant à la même courbe, et séparées par des distances égales, il est visible que l'on aura

$$y' = y + \Delta y$$
$$y'' = y' + \Delta y' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$$
$$y''' = y'' + \Delta y'' = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$$
$$y^{IV} = y''' + \Delta y''' = y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$
$$y^{V} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = y + n\Delta y + \frac{n.n-1}{2}\Delta^2 y + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\Delta^3 y$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\Delta^4 y + \ldots \text{etc.} + \Delta^n y \ldots (1)$$

Telle sera l'expression de l'ordonnée ST, répondant à l'abscisse

$$AP + PS = x + n\Delta x :$$

249. On aura aussi en vertu des mêmes principes, et de la notation expliquée;

$$\Delta y = y' - y$$
$$\Delta y' = y'' - y'$$
$$\Delta y'' = y''' - y''$$
$$\Delta y^{(n)} = y^{(n+1)} - y^{(n)}.$$

Si on retranche ces équations l'une de l'autre, on aura

$\Delta y' - \Delta y$, ou $\Delta^2 y = y'' - 2y' + y$
$\Delta y'' - \Delta y'$, ou $\Delta^2 y' = y''' - 2y'' + y'$
$\Delta y''' - \Delta y''$, ou $\Delta^2 y'' = y^{IV} - 2y''' + y''$
etc. . . . . .

Soustrayant de nouveau ces équations l'une de l'autre, on aura

$\Delta^2 y' - \Delta^2 y$, ou $\Delta^3 y = y''' - 3y'' + 3y' - y$

$\Delta^2 y'' - \Delta y'$, ou $\Delta^3 y' = y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y'$

etc. . . . . .

Les différences quatrièmes se formeront des différences troisièmes, comme celles ci se forment des différences secondes : elles auront pour indice Δ^4; et continuant de former ainsi les différences cinquièmes, sixièmes et suivantes, en les retranchant successivement les unes des autres, on parviendra à la formule générale dont la loi est évidente,

$$\Delta^n . y = y^{(n)} - n . y^{(n-1)} + \frac{n . n-1}{2} y^{(n-2)}$$

$$- \frac{n . n-1 . n-2}{2 . 3} y^{(n-3)} + \ldots \pm y \ldots (2);$$

ce sera l'expression de la différence de l'ordre n, de l'ordonnée y répondant à l'abscisse $A P = x$; l'indice (n) ne désigne pas une puissance, mais indique seulement le rang de l'ordonnée.

Les équations (1) et (2) sont d'un très - grand usage dans le calcul des différences; il importe de les avoir toujours présentes à la mémoire.

250. Dans le calcul qui précède, on a supposé que les ordonnées successives $y, y', y'' \ldots$ étoient prises à égales distances, ou ce qui revient au même, on a supposé que Δx étoit constant : on a pour lors Fig. 52.

$P'' P' - P' P$, ou $\Delta x' - \Delta x = \Delta^2 x = 0$.

On auroit pu faire toute autre supposition, comme par exemple de mener les ordonnées $P' M'$, $p m$,

de manière que leurs accroissemens respectifs RM', $r\,m$ soient égaux, et pour lors on auroit

$$\Delta^2 y = 0, \text{ et } p\,P - P'\,P,$$

ou $$\Delta\,x' - \Delta\,x = \Delta^2 x,$$

ne seroit pas zéro : mais soit que l'on fasse varier uniformément une des variables, soit qu'on ne regarde aucune différence comme constante, on doit toujours arriver au même résultat : on donne ordinairement à x une suite de valeurs en progression arithmétique, de telle sorte qu'on ait

$$AP = x,\ AP' = x + \Delta\,x,\ AP'' = x + 2\,\Delta\,x,\ AP''' = x + 3\,\Delta\,x \ldots\ AS = x + n\,\Delta\,x,$$

ce qui rend

$$\Delta^2 x = 0.$$

251. Au moyen des formules précédentes, on pourra prendre telle différence qu'on voudra d'une fonction algébrique à une variable : je suppose, par exemple, qu'on demande la différence seconde de l'équation

$$y = F.\,x \ldots$$

si on suppose $\Delta\,x$ constant, on aura

$$\Delta^2 y = F(x + 2\Delta x) - 2F(x + \Delta x) + F.x \ldots \quad (249)$$

$$\left.\begin{array}{l} = Fx + 2\,\Delta\,x\,F'.\,x + \dfrac{4\,\Delta\,x^2}{2} F''.\,x + \ldots \\ -2\,F.\,x - 2\,\Delta\,x\,F'x - \dfrac{2\,\Delta\,x^2}{2} F''.x + \ldots \\ +Fx \end{array}\right\}$$

$$= \Delta\,x^2\,F''x + \ldots \text{ etc.}$$

Soit $F\,x = x^2 \ldots$ on aura

$$F'\,x = 2\,x \ldots F''\,x = 2 \ldots \text{ et } F'''\,x = 0;$$

donc $\Delta^2 y = 2\Delta x^2$.

Soit $Fx = x^n$.. on aura

$$\Delta^2 y = (x+2\Delta x)^n - 2(x+\Delta x)^n + x^n :$$

en développant tous ces binomes, et réduisant, on aura

$$\Delta^2 y = n.n-1x^{n-2}\overline{\Delta x}^2 + n.n-1.n-2x^{n-3}\Delta x^3 + \ldots \text{etc.}$$

252. Soit enfin l'équation à trois variables

$$z = xy :$$

si on en cherche les différences, on aura, en supposant Δx constant

$$\begin{aligned}
\Delta z &= \Delta x.y + \{x+\Delta x\}\Delta y,\\
\Delta^2 z &= 2\Delta x.\Delta y + \{x+2\Delta x\}\Delta^2 y,\\
\Delta^3 z &= 3\Delta x.\Delta^2 y + \{x+3\Delta x\}\Delta^3 y,\\
\Delta^4 z &= 4\Delta x\Delta^3 y \quad \{x+4\Delta x\}\Delta^4 y,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta^n z &= n\Delta x\Delta^{n-1} y \quad \{x+n\Delta x\}\Delta^n y.
\end{aligned}$$

Il est aisé de s'assurer de la vérité de ces résultats, en observant que pour avoir la différence seconde de z, on met dans la différence première, $x+\Delta x$ à la place de x, $y+\Delta y$ à la place de y, et $\Delta y + \Delta^2 y$, à la place de Δy; on retranche ensuite la différence première, et faisant la réduction, on a la valeur de $\Delta^2 z$, telle qu'on vient de la donner : on trouve la différence troisième, en mettant dans la différence seconde, $x+\Delta x$ à la place de x, $y+\Delta y$ à la place de y, $\Delta y+\Delta^2 y$ à la place de Δy, et $\Delta^2 y + \Delta^3 y$ à la place de $\Delta^2 y$; on en retranche ensuite la différence seconde : et ainsi des autres différences.

Différences des fonctions transcendantes.

253. La recherche des différences des fonctions transcendantes, peut en général se réduire par la théorie des fonctions analytiques, à celle des différences des fonctions algébriques; mais il est souvent plus utile de conserver aux fonctions différences la forme transcendante, ce qui leur donne l'avantage de pouvoir être représentées par des expressions finies.

Soit $y = \log x$: il en résultera

$$\Delta y = \log(x+\Delta x) - \log x = \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

expression qui, au moyen de la formule connue (102) pour trouver le logarithme d'un binome, devient

$$\Delta y = M\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\overline{\Delta x}^2}{2.x^2} + \frac{\Delta x^3}{3.x^3} - \frac{\Delta x^4}{4.x^4} + \ldots\right)$$

quant à la différence seconde, on aura

$$\Delta^2 y = \log(x+2\Delta x) - 2\log(x+\Delta x) + \log x$$

$$= \log\left(\frac{x^2+2x\Delta x}{(x+\Delta x)^2}\right) = \log\left(1-\frac{\Delta x^2}{(x+\Delta x)^2}\right)$$

$$= -M\left(\frac{\Delta x^2}{(x+\Delta x)^2} + \frac{\Delta x^4}{2(x+\Delta x)^4} + \frac{\Delta x^6}{3(x+\Delta x)^6} + \ldots\right)$$

on aura aussi

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y' - \Delta^2 y = \log\left(1-\frac{\Delta x^2}{(x+2.\Delta x)^2}\right)$$

$$- \log\left(1-\frac{\Delta x^2}{(x+\Delta x)^2}\right),$$

expressions faciles à développer.

254. Soit $y = a^x$... on aura

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1) :$$

on a vu (107) que

$$a^{\Delta x} = 1 + \Delta x \log a + \left(\frac{\Delta x \log a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x \log a}{2.3}\right)^3 + \left(\frac{\Delta x \log a}{2.3.4}\right)^4 + \ldots$$

donc

$$\Delta y = a^x \Delta x \log a + \left(\frac{\Delta x \log a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x \log a}{2.3}\right)^3 + \ldots$$

on aura aussi

$$\Delta^2 y = a^{x+2\Delta x} - 2a^{x+\Delta x} + a^x = a^x (a^{2\Delta x} - 2a^{\Delta x} + 1) = \ldots$$
$$= a^x (a^{\Delta x} - 1)^2 :$$

et si l'on fait $a^{\Delta x} - 1 = A$, on aura évidemment

$$\Delta y = a^x . A$$
$$\Delta^2 y = a^x . A^2$$
$$\Delta^3 y = a^x . A^3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n y = a^x . A^n .$$

On observera que A est une quantité constante, parce qu'on fait Δx constant, ou $\Delta^2 x = 0$.

255. Soit $y = z a^x$,

z étant une fonction de x, on aura

$$\Delta y = (z + \Delta z) a^{x+\Delta x} - z a^x = ((a^{\Delta x} - 1) z + a^{\Delta x} \Delta z) a^x :$$

on fera comme ci-dessus $a^{\Delta x} =$ une constante α : l'expression deviendra

$$\Delta y = ((\alpha - 1) z + \alpha \Delta z) a^x = z' a^x$$

en faisant, pour abréger

$$(\alpha - 1) z + \alpha \Delta z = z',$$

c'est-à-dire = une nouvelle fonction de x : on aura donc

$$\Delta^2 y = ((a-1)z' + a\,\Delta z')\,a^x,$$

et substituant à la place de z' sa valeur,

$\Delta^2 y = ((a-1)^2 z + 2(a-1)a\,\Delta z + a^2\Delta^2 z)a^x$: si on désigne encore le facteur qui multiplie a^x, par z'', on aura

$$\Delta^2 y = z'' a^x,$$

et par conséquent

$$\Delta^3 y = ((a-1)z'' + a\,\Delta z'')\,a^x;$$

ou en substituant la valeur de z''

$$\Delta^3 y = ((a-1)^3 z + 3(a-1)^2 a\Delta z + 3(a-1)a^2\Delta^2 z + a^3\Delta^3 z)\,a^x.$$

On trouvera les différences quatrièmes et cinquièmes, etc. en suivant le même procédé, et l'on aura en général

$$\Delta^n (z\,a^x) = \left\{ (a-1)^n z + n.(a-1)^{n-1} a\,\Delta z + \frac{n.n-1}{2}(a-1)^{n-2} a^2\Delta^2 z + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}(a-1)^{n-3} a^3\Delta^3 z + \ldots a^n\Delta^n z \right\} a^x.$$

Si on fait $z = 1$, on aura

$$\Delta^n a^x = (a-1)^n a^x = A^n a^x,$$

comme on l'a trouvé dans l'article précédent, en observant que $a - 1 = A$.

256. Soit l'équation $y = \sin x$, on aura

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Pareillement l'équation $y = \cos x$ donne

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x :$$

la première de ces équations donne

$$\Delta y = \sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x ;$$

la seconde donnera aussi

$$\Delta y = \cos x \cos \Delta x - \sin x \,.\, \sin \Delta x - \cos x,$$

et en faisant usage des formules qui donnent les sinus et cosinus en fonction de l'arc (112), on a

$$\sin \Delta x = \Delta x - \frac{\overline{\Delta x}^3}{2.3} + \frac{\overline{\Delta x}^5}{2.3.4.5} - \frac{\overline{\Delta x}^7}{2.3\ldots 7} + \ldots \text{ etc.}$$

$$\cos \Delta x = 1 - \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} + \frac{\overline{\Delta x}^4}{2.3.4} - \frac{\overline{\Delta x}^6}{2.3\ldots 6} + \ldots \text{ etc.}$$

Substituant ces valeurs, et ordonnant par rapport aux puissances de Δx, on a

$$\Delta.\sin x = \Delta x \cos x - \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} \sin x$$

$$- \frac{\overline{\Delta x}^3}{2.3} \cos x + \frac{\overline{\Delta x}^4}{2.3.4} \sin x + \ldots$$

$$\Delta.\cos x = -\Delta.x \sin x - \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} \cos x$$

$$+ \frac{\overline{\Delta x}^3}{2.3} \sin x + \frac{\overline{\Delta x}^4}{2.3.4} \cos x. - \ldots$$

Si l'on a $y = \text{tang } x$,

on aura

$$\Delta y = \text{tang}(x+\Delta x) - \text{tang} x = \frac{\text{tang } x + \text{tang } \Delta x}{1 - \text{tang} x \text{tang} \Delta x} - \text{tang } x$$

$$= \frac{\text{tang } \Delta x\,(1+\text{tang}^2 x)}{1 - \text{tang } x.\text{tang } \Delta x} = \frac{\text{tang } \Delta x}{\cos^2.x(1 - \text{tang} x \text{tang} \Delta x)}$$

on aura aussi

$$\Delta \cot x = \frac{-\text{tang } \Delta x}{\sin^2.x\,(1 + \cot x.\cot \Delta x)}.$$

On trouveroit les différences secondes des fonctions ci-dessus, en développant les termes

$$\sin(x + 2\Delta x) - 2\sin(x + \Delta x) + \sin x \text{ etc.}$$

257. Il résulte des principes établis sur la différentiation, et sur le développement des fonctions analytiques, que si l'on a une équation $F(xy)=0$, et qu'on en prenne la différence première, tous ses termes seront multipliés par Δy ou Δx : l'équation différence exprimera donc le rapport de

Fig. 51.

$$\frac{RM'}{RM}, \text{ ou } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

en fonction de x, y et en quantités constantes : l'objet du calcul des différences est d'exprimer le rapport en fonction des variables x et y : ce problême ne présente jamais de grandes difficultés, parce qu'il est toujours possible de prendre la différence d'une fonction donnée ; mais le problême inverse qui consiste à trouver le rapport que les variables ont entr'elles, par le moyen du rapport de leurs différences, est beaucoup plus difficile que le premier, et souvent impossible : la solution de ce problême constitue la seconde partie du calcul des différences, que l'on appelle calcul inverse des différences.

CHAPITRE II.

Calcul inverse des différences.

258. Etant donnée la différence d'une fonction algébrique ou transcendante, trouver la fonction finie dont celle-ci est la différence, ou ce qui est la même chose, remonter de la fonction différence à la fonction primitive, est ce qu'on appelle intégrer. La fonction primitive est appelée pour lors l'intégrale de la fonction différence : on la désigne ordinairement par la lettre grecque Σ qui est opposée à Δ, comme le mot somme ou intégrale est opposé

au mot différence : ainsi $\Sigma . \Delta . x$ désigne l'intégrale dont Δx est la différence, c'est-à-dire x; car on sait par la méthode directe des différences, que Δx est la différence de x, donc réciproquement x est l'intégrale de Δx : d'où il suit qu'on intègre une différence Δx, en ôtant le signe Δ, comme on élève une quantité radicale à la puissance désignée par l'exposant du radical, en ôtant le radical; et on prend la différence d'une intégrale $\Sigma . \Delta x$, en ôtant le signe Σ, et écrivant Δx.

259. Soit la courbe

$$MM'M''\ldots,$$

l'abscisse $AP = x$,

l'ordonnée $PM = y \ldots$

Les ordonnées $P'M$, qui précèdent PM, seront désignées par ${}'y$, ${}''y$, ${}'''y$; et celles qui suivent, par y', y'', $y'''\ldots$ Soit l'ordonnée AB répondant à l'abscisse zéro $= A \ldots$ on aura Fig. 53.

$$y - {}'y = \Delta\, {}'y, \text{ ou } y = {}'y + \Delta\, {}'y;$$

par la même raison

$${}'y = {}''y + \Delta\, {}''y; \ldots {}''y = {}'''y + \Delta . {}'''y \ldots \text{ etc.}$$

donc
$$y = A + \Delta . {}'y + \Delta . {}''y + \Delta . {}'''y + \ldots$$
$$= A + \Delta . \{{}'y + {}''y + {}'''y + \ldots\}:$$

c'est-à-dire que l'ordonnée y, ou telle autre ordonnée qu'on voudra, est égale à la première ordonnée A, plus à la somme des différences, ou à la différence de la somme des ordonnées qui précèdent; et si l'on fait $A = 0$, c'est-à-dire si l'on a $y = 0$ en même temps que $x = 0$, on aura

$$y = \Delta \{{}'y + {}''y + {}'''y + \ldots\} \ldots (1).$$

260. L'ordonnée d'une courbe est toujours fonc-

tion de l'abscisse correspondante, d'où il suit qu'une fonction de x est toujours la différence de la somme des fonctions qu'on formeroit en mettant successivement dans la première pour x,

$$x - \Delta x, x - 2\Delta x, x - 3\Delta x \ldots \text{etc.}$$

L'espace $PM'M'P'$ peut être considéré comme une certaine fonction de x, dans laquelle, si on met successivement pour x,

$$x - \Delta x, x - 2\Delta x, x - 3\Delta x,$$

on aura les espaces qui précèdent $'P'M''M''P$...etc., donc l'espace $PM'M'P$ est la différence de la somme de tous les espaces précédens.

Par la même raison, l'arc $M'M$ peut être considéré comme la différence de la somme de tous les arcs $'M''M + ''M'''M + \ldots$ etc.

Si l'on suppose $y = F.x$, et que la distance d'une ordonnée à la suivante soit prise pour l'unité, c'est-à-dire, si l'on fait $\Delta x = 1$, l'équation (1) deviendra $Fx = \Delta\{F(x-1) + F(x-2) + F(x-3) + \ldots\}$: d'où on déduit, en prenant l'intégrale,

$$\Sigma.Fx = F(x-1) + F(x-2) + F(x-3) + \ldots$$

261. L'intégrale de Fx, ne renferme, comme on voit, que la somme des termes qui le précèdent, depuis tel terme qu'on voudra jusqu'à celui du rang $x-1$ inclusivement; si on veut avoir la somme des mêmes termes jusqu'à celui du rang x inclusivement, il est visible qu'à la somme précédente, il faut ajouter le terme Fx.

Pour désigner la somme de tous les termes jusqu'à celui du rang x inclusivement, on emploie un signe différent S, et l'on se sert du mot *somme* pour exprimer $S.F.x$, tandis que l'on emploie le mot in-

tégrale pour exprimer $\Sigma . F.x...$ on aura donc, d'après ce qui précède,

$$S . Fx = \Sigma . F.x + Fx...$$

on a aussi

$$\Sigma F(x+1) = Fx + F(x-1) + F(x-2) + F(x-3) + ...$$

donc $$S . Fx = \Sigma . F(x+1).$$

Ainsi lorsqu'on a l'intégrale d'une fonction de x, il est facile de former la somme; il suffit de substituer $x + 1$ à x.

L'intégration et la sommation ne doivent pas être confondues, puisque les résultats en sont différens; mais ces deux opérations ont entr'elles des rapports intimes, puisqu'on peut passer facilement du résultat de la première à celui de la seconde, et réciproquement.

Intégration et sommation des fonctions entières et rationnelles d'une variable.

262. C'est dans la méthode directe des différences qu'il faut apprendre les règles de la méthode inverse, parce que c'est en connoissant la loi que l'on observe, en descendant des quantités variables à leurs différences, qu'on pourra apprendre à remonter des différences aux grandeurs génératrices, comme en algèbre et en arithmétique, on apprend les règles de la division et de l'extraction des racines, en observant celles de la multiplication et de l'élévation aux puissances.

Avant de donner ces règles, nous observerons 1°. que A étant une constante et X une variable, les expressions $\Sigma A X$, ou $A . \Sigma X$ sont identiques; 2°. que $\Sigma . (x + Y + Z...) = \Sigma . X + \Sigma . Y + \Sigma . Z + ...$ Cela posé,

Il sera toujours facile de prendre l'intégrale ou la somme d'une fonction rationelle et entière d'une variable x : car une pareille fonction ne sera composée que de puissances entières et positives de x ; et nous allons démontrer que l'intégrale d'une puissance entière et positive de x est donnée par celle des puissances inférieures. Prenons pour cela la différence de x^{n+1}, on aura

$$\Delta . x^{n+1} = (x+\Delta x)^{n+1} - x^{n+1} = n+1 . x^n \Delta x$$

$$+ \frac{n+1.n}{2} x^{n-1} \Delta x^2 + \frac{n+1.n.n-1}{2.3} x^{n-2} \Delta x^3 + \ldots$$

on déduit de-là en transposant, divisant par $n+1\Delta.x$, et intégrant

$$\Sigma . x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1 . \Delta x} - \frac{n}{2} \Delta x \Sigma x^{n-1}$$

$$- \frac{n.n-1}{2.3} \Delta x^2 \Sigma . x^{n-2} - \ldots - \frac{\Delta x^n}{n+1} \Sigma . x^0 \ldots$$

On voit par cette formule que la valeur de $\Sigma.x^n$, ne dépend que de Σx^{n-1}, et des intégrales des puissances inférieures : par la même raison, celle de Σx^{n-1} dépendra de $\Sigma . x^{n-2}$, et ainsi des autres, jusqu'à Σx^0 : donc par les substitutions successives, on obtiendra la valeur de $\Sigma . x^n$, lorsque celle de x^0 sera connue.

263. La différence de x étant Δx, réciproquement l'intégrale de Δx sera x : on suppose ordinairement, tant dans la méthode inverse des différences, que dans la méthode directe, que l'accroissement Δx est une quantité constante qu'on prend pour l'unité, c'est-à-dire qu'on fait $\Delta x = 1$: dans cette supposition $\Sigma . \Delta x = \Sigma . 1 = \Sigma . x^0$:

mais on sait que

$$\Sigma . \Delta x = x - 1,$$

donc

$$\Sigma x^{\circ} = x - 1,$$

Si l'on ne prenoit pas Δx pour l'unité, mais qu'on le regardât toujours comme constant, on auroit

$$\Sigma . \Delta x = \Delta x \Sigma 1 = \Delta x \Sigma x^{\circ} = x - 1 :$$

donc

$$\Sigma x^{\circ} = \frac{x - 1}{\Delta x}.$$

On saisira peut-être mieux la véritable signification de Σx° par l'observation suivante;

$x^{\circ} = 1$, et $\Sigma x^{\circ} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots =$ l'unité répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans

$$x - 1 = 1 \times x - 1 = x - 1,$$

ce qui est évident.

Par la même raison,

$$\Sigma a = a \Sigma x^{\circ} = a (x - 1);$$

car $\Sigma a = a + a + a + a + a \ldots = a (x - 1)$

Reprenons la formule générale, et supposons successivement $n = 0, = 1, = 2, = 3 \ldots$ etc., on aura

1°. Pour $n = 0, \Sigma x^{\circ} = \frac{x - 1}{\Delta x}$

2°. Pour $n = 1, \Sigma . 3 = \frac{x^2}{2 \Delta x} - \frac{x}{2}$

3°. Pour $n = 2, \Sigma x^2 = \frac{x^3}{3 \Delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x \Delta x}{6}$

4°. Pour $n = 3, \Sigma . x^3 = \frac{x^4}{4 \Delta x} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2 \Delta x}{4}.$

Les intégrales données par les formules précé-

dentes, se rapportent aux séries des puissances des nombres croissant par intervalles égaux à Δx : ainsi en faisant $\Delta x = 1$, la formule 2 donnera l'intégrale de la série des nombres naturels

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + x - 1 + x.$$

La formule 3 donne l'intégrale de la série des nombres quarrés

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \ldots + (x-1)^2 + x^2.$$

La formule 4 donne celle de la suite des troisièmes puissances

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + \ldots (x-1)^3 + x^3 \ldots$$

et ainsi des autres.

264. On a vu (261) que

$$SF.x = \Sigma F x . + Fx, \text{ ou } = F(x+1):$$

on aura donc les formules pour les sommes, par le moyen des intégrales précédentes ; et comme dans la formule générale de Σx^n, le second terme est

$$-\frac{x^n}{2},$$

et que pour avoir Sx^n, il faut ajouter x^n, il est visible que pour transformer l'intégrale en somme, il suffit de changer le signe du second terme de l'intégrale : on aura donc, pour la sommation des puissances des nombres naturels,

$$S\,x^0 = x \cdot$$

$$S\,x^1 = \frac{x^2 + x}{2}$$

$$S\,x^2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

$$S\,x^3 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}.$$

265.

265. Avant d'aller plus loin, nous ferons ici une remarque importante : comme la différence d'une grandeur variable x, et celle de $x + a$ sont également Δx, réciproquement l'intégrale de Δx est également x, et $x + a$: ainsi lorsqu'on a trouvé l'intégrale, ou la somme d'une différence, il faut y ajouter une constante arbitraire, qu'on détermine ensuite dans chaque cas particulier, par les conditions du problême.

Pour sentir encore mieux la nécessité d'introduire une constante arbitraire dans l'intégration d'une fonction; prenons pour exemple la série des nombres triangulaires

$$.3.6.10.15... \frac{x.x-1}{2}. \frac{x+1.x}{2}$$

dont la différence d'un terme quelconque à celui qui le précède immédiatement, est égale au nombre qui désigne le rang du terme dont on cherche la différence, c'est-à-dire que l'on a généralement

$$\Delta.\frac{x+1.x}{2} = x.$$

Si à chaque terme de la seconde série précédente, on ajoute une quantité constante a, on aura la suite

$$1+a.3+a.6+a.10+a...\frac{x.x-1}{2}+a.\frac{x+1.x}{2}+a;$$

il est visible que dans cette dernière série, la différence d'un terme au précédent sera encore x, car on a

$$\frac{x+1.x}{2}+a-\frac{x.x-1}{2}-a=x:$$

donc l'intégrale de x, ou $\Sigma x = \frac{x.x-1}{2}+a.$

Fig. 53. Soit en général une suite de termes représentés par les ordonnées d'une courbe

$$PM.'P'M.''P''M.'''P'''M\ldots$$

ou $$'''y.''y.'y.y.y'.y''.y'''\ldots$$

dont la différence d'un terme au précédent est

$$P'M' - PM = RM:$$

si chacune de ces ordonnées étoit augmentée ou diminuée de la constante a, c'est-à-dire si l'axe des abscisses étoit transporté de A en e, ou e', on auroit la suite

$$'''y \pm a.''y \pm a.'y \pm a.y \pm a.y' \pm a\ldots$$

et il est visible que la différence $LM' - NM$, seroit encore

$$RM', = \Delta y:$$

donc réciproquement

$$\Sigma.\Delta y = y \pm a.$$

Il suit de-là que lorsqu'on a une fonction de x dont on veut prendre l'intégrale ou la somme, cette intégrale ou cette somme est susceptible d'une infinité de valeurs particulières, qui toutes donneroient la même différence, et que pour donner à l'intégrale la signification la plus étendue dont elle est susceptible, il faut introduire une constante arbitraire qu'on détermine ensuite dans chaque cas particulier, par les conditions du problême, comme dans l'exemple suivant.

Soit la formule

$$\frac{x.x+1}{2},$$

qu'on sait représenter la somme de tous les termes de la progression des nombres naturels

$$1.2.3.4\ldots x-1.x.$$

Si on ne demandoit la somme des termes de cette série, qu'à commencer par le quatrième inclusivement, pour lors la formule

$$\frac{x.x+1}{2}$$

ne donneroit pas la somme qu'on cherche, mais elle seroit renfermée dans la suivante, qui est la plus générale...

$$\frac{x.x+1}{2}+a.$$

Pour déterminer a, on fera le raisonnement suivant : lorsque $x=3$, la somme qu'on cherche doit être zéro, donc on a l'équation

$$\frac{3\times 4}{2}+a=0,$$

et par conséquent

$$a=-\frac{3\times 4}{2}:$$

on aura donc pour le cas particulier que nous examinons,

$$S.x=\frac{x.x+1}{2}-\frac{3\times 4}{2}.$$

L'intégrale de la différence seconde $\Delta^2 y$ demandera deux constantes arbitraires : car si l'on avoit à prendre la différence seconde de $y=ax+b$, on auroit par une première opération

$$\Delta y=a\Delta x,$$

et Δx étant constant, une seconde différentiation donneroit

$$\Delta^2 y=0:$$

donc réciproquement en remontant de la différence

seconde à l'intégrale, on doit faire reparoître les deux constantes a et b, qui ont disparu par la différentiation : l'intégrale de la différence troisième $\Delta^3 y = 0$ demandera trois constantes, et ainsi des intégrales des ordres supérieurs; en sorte que l'intégrale finale d'une fonction doit contenir autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'ordre de la différence.

Intégration et sommation des fonctions composées de facteurs en progression arithmétique.

266. Les principes déjà posés pour intégrer et sommer les puissances entières de x, telles que Σx^n, sont suffisans pour intégrer et sommer toute fonction rationelle de x, qui n'a pas de diviseur variable; mais on peut dans beaucoup de cas employer des moyens plus simples et plus faciles.

On a vu (243) que $\Delta . x . x + \omega$ étoit égal à

$$2\omega . x + \omega,$$

donc réciproquement

$$\Sigma . x + \omega = \frac{1}{2\omega} x . x + \omega.$$

On a aussi

$$\Delta . x . x + \omega . x + 2\omega = 3\omega . x + \omega . x + 2\omega :$$

donc

$$\Sigma . (x + \omega . x + 2\omega) = \frac{1}{3\omega} x . x + \omega . x + 2\omega.$$

On aura donc généralement

$$\Sigma (x + \omega . x + 2\omega . x + 3\omega \ldots x + n\omega) = \frac{x . x + \omega . x + 2\omega . x + 3\omega \ldots x + n\omega .}{n\omega .}$$

Si l'on fait la différence $\omega = 1$, on aura

$$\Sigma.(x+1.x+2.x+3...x+n) = \frac{x.x+1.x+2.x+3...x+n}{n}.$$

On voit par cette formule, *que l'intégrale du produit d'un nombre n de facteurs en progression arithmétique, commençant par $x+1$, et dont la différence commune est égale à la différence de la variable prise pour unité, contiendra les mêmes facteurs multipliés par x, et divisés par n : pour avoir la somme, on changera x en $x+1$; et on n'oubliera pas d'ajouter une constante arbitraire: on aura ainsi*

$$\Sigma.x+1 = \frac{x.x+1}{2} + a...$$

$$S.x+1 = \frac{x+1.x+2}{2} + A$$

$$\Sigma\ x+1.x+2 = \frac{x.x+1.x+2}{3} + b...$$

$$S\ x+1.x+2 = \frac{x+1.x+2.x+3}{3} + B.$$

$$\Sigma\ x+1.x+2.x+3 = \frac{x.x+1.x+2.x+3}{4} + c...$$

$$S\ x+1.x+2.x+3 = \frac{x+x1.+2.x+3.x+4.}{4} + C;$$

et ainsi des autres.

Si le premier facteur du terme à intégrer étoit x, au lieu de $x+1$, on substitueroit dans les intégrales et les sommes précédentes, x, à $x+1$, et l'on auroit

$$S(x.x+1.x+2...x+n-1) = \frac{x.x+1.x+2.x+3...x}{n-1}$$

Si le terme à intégrer ou à sommer étoit

$$x+a+\omega.x+a+2\omega.x+a+3\omega\ldots x+a+n\omega,$$

on feroit $x+a=z$,

et l'on auroit Δx, ou $\omega=\Delta z$:

le terme deviendroit donc

$$z+\omega.z+2\omega.z+3\omega.z+4\omega\ldots z+n\omega,$$

qu'on intégreroit comme les précédens.

267. Si le terme à intégrer étoit

$$x+a.x+2a.x+3a\ldots x+na,$$

a n'étant pas égal à Δx, ou ω, on fera

$$x=\frac{az}{\omega}\ (244),$$

et l'on aura à intégrer

$$\frac{a^n}{\omega^n}(z+\omega)(z+2\omega)(z+3\omega)\ldots(z+n\omega)\ldots$$

268. Supposons à présent que la fonction dont on cherche l'intégrale est une fraction dont le dénominateur est le produit de plusieurs facteurs semblables aux précédens : on aura

$$1^\circ.\ \Delta.\frac{1}{x}=-\frac{1}{x.x+1}\ldots$$

$$\text{donc } \Sigma.\frac{1}{x.x+1}=a-\frac{1}{x}$$

$$2^\circ.\ \Delta.\frac{1}{x.x+1}=-\frac{2}{x.x+1.x+2}\ldots$$

$$\text{donc } \Sigma.\frac{1}{x.x+1.x+2}=b-\frac{1}{2.x.x+1}$$

3°. $\Delta \frac{1}{x.x+1.x+2} = -\frac{3}{x.x+1.x+2.x+3}$:

donc $\Sigma.\frac{1}{x.x+1.x+2.x+3} = c - \frac{1}{3.x.x+1.x+2}$:

d'où il suit que l'on aura généralement

$$\Sigma \frac{A}{x.x+1.x+2...x+n} = M - \frac{A}{n(x.x+1.x+2.x+3...x+n-1}.$$

On voit par ces exemples *que l'intégrale des fractions dont le dénominateur est un produit de facteurs en progression arithmétique, ayant pour différence commune la différence même de la variable, est négative, et contient un facteur de moins au dénominateur, lequel dénominateur est multiplié par le nombre de facteurs restans, et par Δx, lorsque la différence de la variable n'est pas égale à l'unité.*

Pour avoir la somme de la même fraction, il faudra changer x en $x+1$, selon ce qui a été dit plusieurs fois.

Intégration et sommation des fonctions exponentielles.

269. Soit une fonction exponentielle a^x dont on demande l'intégrale, a étant une constante, et x la variable, dont la différence Δx est supposée constante.

Puisque Δx est constant, $a^{\Delta x} - 1$ sera une quantité constante. Cela posé

$$\Sigma a^x = \Sigma a^x \left(\frac{a^{\Delta x}-1}{a^{\Delta x}-1}\right) = \Sigma.\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{a^{\Delta x}-1} = \frac{\Sigma.\Delta a^x}{a^{\Delta x}-1}$$

$$= \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1} + A, \text{ et } \Sigma.a^{x+1} = \frac{a^{x+1}}{a^{\Delta x}-1} + A.$$

Si l'on fait $\Delta x = 1$, on a

$$S.a^x = \frac{a^{x+1}}{a-1} + A.$$

Cette formule représente la somme de tant de termes qu'on voudra de la progression géométrique

$$a.a^2, a^3.a^4.a^5 \ldots a^x$$

en déterminant convenablement la constante. Si on veut la somme de tous les termes à commencer par le premier, on doit avoir $Sa^x = a$, lorsque $x = 1$: on aura donc l'équation

$$\frac{a^2}{a-1} + A = a : \text{ou } A = -\frac{a}{a-1},$$

et par conséquent

$$Sa^x = \frac{a^{x+1} - a}{a-1} :$$

ce qui est conforme à la formule, connue dans les élémens d'algèbre (118).

On a vu (255) que

$$\Delta z a^x = \{ (a^{\Delta x} - 1) z + a^{\Delta x}.\Delta z \} a^x;$$

on aura donc

$$\Sigma.z a^x = \frac{z a^x}{a^{\Delta x} - 1} - \frac{a^{\Delta x}}{a^{\Delta x} - 1} \Sigma.\Delta z a^x. + A.$$

Si $z = x^n$, on aura

$$\Delta x^n = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n.n-1}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{2.3} x^{n-3} \Delta x^3 + \ldots$$

Substituant ces valeurs dans la formule précédente, on aura

$$\Sigma x^n a^x = \frac{x^n a^x}{a^{\Delta x}-1} - \frac{a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}-1}\left\{ n\Delta x \Sigma x^{n-1} a^x \right.$$

$$\left. + \frac{n.n-1}{2}\Delta x^2.\Sigma.x^{n-2}a^x + \ldots + n\Delta x^{n-1}\Sigma x.a^x + \Delta x^n \Sigma x a^x \right\}$$

On voit par cette formule que l'intégrale de $x^n a'^x$, dépend de celle de $x^{n-1}\ a^x$, et des suivantes : celle-ci à son tour dépendra de celle de $x^{n-2}\ a^x$, et des suivantes : d'où il suit que si on sait intégrer a^x, on saura intégrer $x\ a^x$; si on sait intégrer celle-ci, on intégrera $x^2\ a^x$, et ainsi des autres jusqu'à $x^n\ a^x$.

Application des principes précédens aux séries des nombres figurés.

270. Les principales questions qu'on puisse se proposer sur les suites, c'est d'en trouver le terme général et le terme sommatoire, ou la somme de tous les termes (*Arith.* 154.) La recherche du terme général ne souffre point de difficulté lorsque les suites ont des différences constantes, telles, par exemple, que les suites des nombres figurés ou polygones : nous allons nous en occuper dans l'article suivant :

Soit une suite de nombres constans

(1) $a.a.a.a.a.a.a.a.a\ldots$

On formera avec celle-ci les suivantes (121) :

(2) $a.2a.\ 3a.\ 4a.\ 5a.\ 6a.\ 7a.\ \ 8a\ldots$

(3) $a.3a.\ 6a.10a.15a.21a.28a.\ 36a\ldots$

(4) $a.4a.10a.20a.35a.56a.84a.120a\ldots$

. . . . . .

Chacune de ces séries peut être considérée comme

la génératrice des suivantes : nous la représenterons généralement par

$$'''y.''y.'y.y.y'.y^{0}.y'''\ldots$$

Si on prend la série (2) pour génératrice, on aura

$$''y-'''y=a\ldots'y-''y=a\ldots y-'y=a\ldots$$

ou généralement $\Delta y=a$;

c'est-à-dire que la différence première de cette série est constante.

Si l'on prend la série (3) pour la génératrice, on aura

$$''y-'''y=2a\ldots y-''y=3a\ldots y-'y=4a\ldots'y-y=5a\ldots$$

ou $\Delta.'''y=2a\ldots\Delta.''y=3a\ldots\Delta'y=4a\ldots\Delta y=5a\ldots$etc.

et par conséquent

$$\Delta''y-\Delta'''y=a\ldots\Delta'y-\Delta''y=a\ldots\Delta y-\Delta'y=a,$$

ou généralement $\Delta^{2}y=a$;

c'est-à-dire que la différence seconde de la série (5) est constante.

Si on prenoit la série (4) pour la génératrice, on trouveroit que sa différence troisième est constante, et ainsi des suivantes; donc dans les séries des nombres figurés, on parvient toujours à des différences constantes : cela posé,

Puisque dans la série (2) on a

$$\Delta y=a;$$

il est visible qu'on aura

$$y=a\Sigma 1.=ax+b,$$

b étant la constante introduite par l'intégration, et x représentant le nombre des termes de la série.

Si on veut que le premier terme de la suite ré-

ponde à $x = 0$, l'expression $ax + b$ sera le terme général de la progression arithmétique

$$b.b+a.b+2a.b+3a.b+4a...b+ax.$$

On voit que la différence commune de la progression est a, et que le premier terme est b; et comme une progression arithmétique dont la différence est donnée peut commencer par tel nombre qu'on voudra, on doit sentir ici la nécessité d'introduire une constante arbitraire qui puisse représenter ce premier terme dans tous les cas.

Dans la série (3) on a

$$\Delta^2 y = a;$$

on aura donc par une première intégration

$$\Delta y = ax + b,$$

et par une seconde

$$y = a\Sigma x + b\Sigma 1 = a.\frac{x.x-1}{2} + bx + c,$$

b et c étant les deux constantes arbitraires introduites par l'intégration : on changera l'intégrale en somme en écrivant $x+1$ à la place de x, et on déterminera les constantes arbitraires par les deux conditions suivantes; 1°. lorsque $x = 0$, $y = 0$: on remplira cette condition en faisant $c = 0$; 2°. lorsque $x = 1$, $y = a$. Cette seconde condition donne l'équation $a + b = a$;

donc $b = 0$, et l'on a pour terme général,

$$y = a\left(\frac{x.x+1}{2}\right).$$

Dans la série (4) on a

$$\Delta^3 y = a;$$

par une première intégration on a

$$\Delta^2 y = ax + b;$$

par une seconde,

$$\Delta y = a.\frac{x.x-1}{2} + bx + c;$$

et par une troisième,

$$y = a.\frac{x.x-1.x-2}{2.3} + \frac{b.x.x-1}{2} + cx + d;$$

et la somme

$$= a.\frac{x.x+1.x+2}{2.3} + \frac{b.x.x+1}{2} + cx + d.$$

On déterminera les trois constantes par les trois conditions particulières; 1°. lorsque $x=0, y=0$... 2°. lorsque $x=1$, $y=a$... 3°. lorsque $x=2$, $y=4a$; on aura donc les trois équations

$$d=0 \ldots a+b+c+d=a \ldots 4a+3b+2c+d=4a;$$

elles donnent

$$d=0 \ldots b=0 \ldots c=0:$$

donc le terme général sera

$$y = a\left(\frac{x.x+1.x+2}{2.3}\right).$$

271. Si on avoit une série dont la différence constante fût du rang n, on auroit

$$\Delta^n . y = a,$$

et par les intégrations et la sommation,

$$y = a\left(\frac{x.x+1.x+2 \ldots x+n-1}{1.2.3.4 \ldots n-1.n}\right).$$

Pour trouver le terme sommatoire d'une série dont on connoît le terme général, on n'a qu'à intégrer ou sommer ce terme général lorsque cela est possible; or on le pourra toujours dans les séries des nombres figurés : désignons par Y le terme général d'une série des nombres figurés, par T le terme intégral de la même série, et par S le terme sommatoire; on aura généralement, d'après ce qui précède, et d'après les numéros (121 et suivans),

$$Y = a\left(\frac{x.x+1.x+2.x+3\ldots x+n-1}{1.2.3.4.5\ldots\quad n-1.n}\right)$$

$$T = a\left(\frac{x-1.x.x+1.x+2\ldots x+n-1}{1.2.3.4.5\ldots\quad n.n+1}\right)$$

$$S = a\left(\frac{x.x+1.x+2.x+3\ldots x+n-1.x+n}{1.2.3.4.5\ldots\quad n.n+1}\right).$$

On voit par ces formules que le terme général d'une série des nombres figurés est le terme intégral de la série précédente.

272. Si le terme général est une fraction dont le numérateur soit constant, et le dénominateur le produit de plusieurs facteurs en progression arithmétique ayant l'unité pour différence, on aura le terme intégral par la formule du n°. (268); on en déduira

$$Y = \frac{M}{x.x+1.x+2\ldots x+n-1}$$

$$T = A - \frac{M}{n-1(x.x+1.x+2\ldots x+n-2)}$$

$$S = A - \frac{M}{n-1(x+1.x+2.x+3\ldots x+n-1)}$$

Supposons $M = 1.2.3.4.5\ldots n-1$; on déterminera la

constante A par la condition que l'intégrale soit 1, lorsque $x = 1$, ce qui donnera

$$A = \frac{n}{n-1}.$$

Appliquons les formules précédentes aux séries suivantes :

$$+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots$$

dont le terme général est

$$\frac{1.2}{x.x+1},$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\ldots$$

dont le terme général est

$$\frac{1.2.3}{x.x+1.x+2},$$

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\ldots$$

dont le terme général est

$$\frac{1.2.3.4}{x.x+1.x+2.x+3}.$$

On aura pour la première

$$T = 2-\frac{2}{x}\ldots\ldots\ldots\ldots S = 2-\frac{2}{x+1};$$

pour la seconde

$$= \frac{3}{2}-\frac{3}{x.x+1}\ldots\ldots\ldots S = \frac{3}{2}-\frac{3}{x+1.x+2};$$

pour la troisième....

$$T=\frac{4}{3}-\frac{1.2.4}{x.x+1.x+2}\ldots S=\frac{4}{3}-\frac{1.2.4}{x+1.x+2.x+3}.$$

Plus on prendra de termes dans les séries du genre de celles qui précèdent, plus leur somme approchera de $\frac{n}{n-1}$, sans pouvoir jamais lui être rigoureusement égale; mais comme elle peut n'en différer qu'aussi peu qu'on voudra, il s'ensuit que $\frac{n}{n-1}$ est la limite de la somme de tous les termes de ces séries : ainsi 2 est la limite de la somme des termes de la première; $\frac{3}{2}$ est la limite de la somme des termes de la seconde; $\frac{4}{3}$ est la limite de la somme des termes de la troisième.

273. On a vu (131) que le terme général des séries récurrentes est de la forme

$$Aa^x+Bb^x+\ldots+(M+Nx+Px^2+\ldots)c^x:$$

or on sait intégrer toutes les exponentielles, donc on pourra avoir la somme de tous les termes d'une série récurrente dont on connoît le terme général.

Soit la série récurrente

$$2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+\ldots$$

dont le terme général est

$$a^x+xa^x:$$

on aura donc

$$T=\Sigma a^x+\Sigma xa^x=\frac{a^x-a}{a-1}+\frac{xa^x-a}{a-1}-a\frac{(a^x-a)}{(a-1)^2}\ldots$$

et

$$S=\frac{a^{x+1}-a}{a-1}+\frac{x+1.a^{x+1}-a}{a-1}-\frac{a(a^{x+1}-a)}{(a-1)^2}\ldots(269)$$

Nous n'avons résolu qu'une partie du problême de l'intégration des fonctions d'une seule variable : nous n'avons pas parlé de l'intégration des équations aux différences finies, ni de leur usage dans la théorie des suites récurrentes : nous ne pourrions traiter cette partie importante du calcul des différences sans sortir des bornes d'un ouvrage élémentaire. Le lecteur qui voudra approfondir cette branche d'analyse pourra consulter le Calcul Différentiel et Intégral d'Euler, de Cousin, de Lacroix, de Bossut, les Mémoires de la Société de Turin, ceux de l'Académie de Berlin, les Cahiers de l'Ecole Polytechnique... etc.

DU

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

273. Toute équation algébrique entre deux variables peut être considérée comme exprimant le rapport de l'ordonnée PM d'une courbe à l'abscisse correspondante AP; si on en prend la différence, on aura l'expression du rapport entre l'accroissement de l'ordonnée RM' et l'accroissement correspondant de l'abscisse PP', ou MR (238): cet accroissement de l'abscisse est indéterminé, et peut être aussi petit qu'on veut; parce que rien ne fixe la position de l'ordonnée $P'M'$ par rapport à PM; on peut donc les supposer infiniment près l'une de l'autre, et pour lors PP' et RM' seront infiniment petits, ou moindres que toute grandeur assignable.

Les accroissemens de l'abscisse et de l'ordonnée ont été représentés d'une manière générale par Δx, Δy; mais pour désigner qu'ils sont infiniment petits, on emploie un algorithme particulier, qui consiste à changer la lettre grecque Δ en d: on nomme ces accroissemens *différentielles*, diminutif du mot différence: en sorte que dx, dy, sont les différentielles de x, y, comme Δx, Δy en sont les différences. Différentier une quantité, c'est assigner sa différentielle; c'est-à-dire que si X, par exemple, est une fonction connue de x, la différentier, ce sera assigner la quantité dont cette fonction augmente, en supposant que x devienne $x+dx$. Le

calcul différentiel est donc le même que le calcul des différences, en y considérant les accroissemens Δx, Δy, comme infiniment petits.

Quoique ces différentielles dx, dy soient infiniment petites, elles ne sont pas égales entr'elles; mais elles ont un rapport dépendant de l'équation de la courbe.

Supposons, par exemple, que l'équation qu'on différentie soit celle de la ligne droite SMM' dont l'équation est Fig. 51.

$$y = mx - b :$$

en prenant l'ordonnée immédiatement consécutive, on aura

$$y' = mx' - b \ldots$$

et retranchant la première de la seconde, on a

$$y' - y = m(x' - x), \text{ ou } dy = m\,dx,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = m :$$

ce qui prouve que dans cet exemple les accroissemens infiniment petits de l'ordonnée et de l'abscisse, dy, dx ne sont pas égaux entr'eux; mais que leur rapport est égal à m: il est donc nécessaire d'admettre des infiniment petits, plus petits les uns que les autres. Cette graduation peut aller même jusqu'à l'infini; c'est-à-dire qu'on peut admettre des infiniment petits, infiniment plus petits les uns que les autres (on les nomme infiniment petits du second ordre): on conçoit en effet que si l'ordonnée d'un cercle peut être prise infiniment petite, l'abscisse correspondante sera infiniment petite du second ordre, puisque le diamètre est à l'ordonnée comme l'ordonnée est à l'abscisse: par la même raison, si l'ordonnée est infiniment petite du second

ordre, l'abscisse correspondante sera infiniment petite du quatrième ordre, et ainsi des autres : donc une fois supposée l'existence réelle des quantités infiniment petites du premier ordre, il faut admettre celle des infiniment petits du second ordre, du troisième, du quatrième.... etc. Cela posé, voici les principes sur lesquels repose l'analyse des infiniment petits ;

1°. Les accroissemens dx, dy des variables x, y sont des quantités infiniment petites.

2°. Une quantité infiniment petite doit être regardée comme nulle, comparativement à toute quantité finie.

3°. Deux grandeurs qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite sont égales.

4°. Une quantité infiniment petite du second ordre est infiniment plus petite que celle du premier ordre, et par conséquent doit être négligée dans les calculs lorsqu'elle est comparée avec un infiniment petit du premier ordre : il en est de même des infiniment petits des ordres supérieurs, comparés aux infiniment petits des ordres inférieurs. Les termes multipliés par dx^2, dy^2, $dx\,dy$, sont infiniment petits du second ordre, parce qu'ils désignent le produit d'un infiniment petit par un infiniment petit.

D'après ce qui précède, on peut prescrire la règle suivante pour la différentiation d'une fonction algébrique composée d'une ou plusieurs variables.

Substituez dans la fonction proposée $x+dx$, $y+dy$ à la place de x et y ; retranchez la fonction variée comme dans le calcul des différences, et négligez dans les termes restans ceux qui sont multipliés par dx^2, $dx\,dy$, dy^2, et les puissances supérieures de $dx\,dy$, comme étant infiniment plus petits que ceux qu'on conserve.

On remarquera ici, comme dans le calcul des différences, que la différentielle d'une quantité constante est zéro.

Toute fonction algébrique se présentera sous la forme d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance, d'une racine : nous allons donner des règles particulières pour la différentier sous ces différentes formes, lesquelles sont des conséquences de la règle générale énoncée ci-dessus.

Règle Ire.

274. Proposons-nous d'assigner la différentielle de la somme $x+y+z+\ldots$ Par l'hypothèse, x devient $x+dx$, y devient $y+dy$, z devient $z+dz\ldots$ etc. donc la somme proposée deviendra

$$x+dx+y+dy+z+dz\ldots$$

Si de cette fonction variée on retranche la fonction primitive, on aura

$$dx+dy+dz,$$

pour la différentielle de la fonction donnée.

Soit en second lieu la fonction

$$a+b+c+x+y+z\ldots$$

a, b, c étant des constantes, et x, y, z des variables.

Par la supposition, la différentielle de a, b, c est zéro ; donc la fonction variée sera

$$a+b+c+x+dx+y+dy+z+dz:$$

si on retranche la fonction primitive, on aura pour la différentielle

$$dx+dy+dz.$$

Soit encore la fonction

$$ax+by\ldots$$

Si x devient $x+dx$, et y, $y+dy$, la fonction deviendra

$$ax+a\,dx+by+b\,dy.$$

Si on retranche de cette fonction variée la fonction primitive, on aura pour différentielle

$$a\,dx+b\,dy.$$

Si les termes de la fonction primitive, au lieu d'être positifs, étoient négatifs, les termes différentiels auroient le signe —: on peut donc établir la règle suivante pour différentier une somme ou une différence.

Prenez la différentielle de chaque terme de la fonction proposée en conservant les mêmes signes; vous formerez ainsi une autre fonction où il n'entrera que les différentielles dx, dy... multipliées par les coefficiens constans qui multiplient x, y dans la fonction proposée: elle sera la différentielle demandée.

Règle II.

275. Supposons que la fonction qu'il s'agit de différentier soit le produit de deux variables xy, la fonction variée sera

$$(x+dx).(y+dy)=xy+y\,dx+x\,dy+dx\,dy:$$

si on retranche la fonction primitive, on a pour reste

$$y\,dx+x\,dy+dx.dy;$$

mais dx et dy étant infiniment petits relativement à x et y, le dernier terme $dx.dy$ est infiniment

petit du second ordre ; donc si on le néglige, on aura pour la différentielle de xy,

$$y\,dx+x\,dy.$$

Soit la fonction X dont on demande la différentielle, le produit des trois variables xyz : la fonction variée sera

$$(x+dx)\,(y+dy)\,(z+dz)$$
$$=xyz+yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$$
$$+x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy+dx\,dy\,dz.$$

Si on retranche de cette somme le premier terme parce que c'est la fonction proposée, et qu'on néglige les quatre derniers termes qui sont infiniment petits du second ou du troisième ordre, on aura pour la différentielle de xyz,

$$yz\,dx+xz\,.\,dy+yx\,dz.$$

Soit enfin le produit $axyzu$ dont on demande la différentielle, on écrira

$$a\,(x+dx)\,(y+dy)\,(z+dz)\,(u+du)\,:$$

faisant les multiplications indiquées, retranchant du produit le terme $axyzu$, et négligeant les termes infiniment petits du second, du troisième et du quatrième ordre, on aura pour la différentielle demandée

$$ayzu\,dx+axzu\,dy+axyu\,dz+axyz\,du.$$

On voit donc par tous ces exemples, *que pour différentier un produit de constantes et de variables il faut prendre séparément la différentielle de chaque variable, et la multiplier par le produit de toutes les autres quantités constantes ou variables : on prend ensuite la somme de ces différens produits.*

Règle IIIe.

276. Si la fonction dont on cherche la différentielle est la fraction $\frac{x}{y}$, la fraction variée sera

$$\frac{x+dx}{y+dy},$$

et la différence sera

$$\frac{x+dy}{y+dy}-\frac{x}{y}=\frac{ydx-xdy}{y^2}\left\{1-\frac{dy}{y}+\frac{dy^2}{y^2}-\ldots\right\} \quad (241)$$

Tous les termes qui composent la série sont des multiples de dy, excepté le premier qui est 1 ; donc ils doivent être négligés comparativement à l'unité : on aura donc pour la différentielle de $\frac{x}{y}$,

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2};$$

d'où on déduit la règle suivante.

La différentielle d'une fraction est égale au produit de la différentielle du numérateur multipliée par le dénominateur, moins le produit de la différentielle du dénominateur multipliée par le numérateur ; le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Règle IVe.

277. Si la fonction dont on cherche la différentielle est une puissance telle que ax^m, la fonction variée sera

$$a(x+dx)^m=a\left\{x^m+mx^{m-1}dx+\frac{m.m-1}{2}x^{m-2}dx^2+\ldots+dx^m\right\}$$

Si on retranche de ce développement le premier terme, qui est la fonction primitive, tous les autres se trouveront multipliés par les puissances successives de dx: donc en ne conservant que le terme multiplié par la première puissance de dx on aura la différentielle de

$$a x^m = m.a x^{m-1} dx :$$

on aura donc la règle suivante.

La différentielle d'une puissance est égale au produit de l'exposant de cette puissance multipliée par la quantité variable élevée à une puissance moindre d'une unité, et multipliée encore par la différentielle de la variable.

Règle V^e.

278. Si la fonction dont on cherche la différentielle est une racine telle que $\sqrt[m]{x}$, on la mettra sous la forme d'une puissance fractionnaire, et l'on aura $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$;

mais par la règle précédente la différentielle de

$$x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} dx :$$

donc la règle pour différentier une racine rentre dans celle des puissances. On peut donc généraliser la règle précédente, *quel que soit l'exposant m de la variable, positif, négatif, entier, fractionnaire la différentielle de x^m sera*

$$m x^{m-1} dx.$$

Il suit de la même règle que $\frac{x}{y} = x y^{-1}$: donc la

différentielle de $\frac{x}{y} = \text{dif. } xy^{-1} = y^{-1}dx - xy^{-2}dy$

$$= \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

comme on l'a trouvé par la règle 3... Ainsi la règle 3 rentre dans les règles 2 et 4... La règle 5e rentre aussi dans la règle 4e; on peut donc ramener toutes les règles de différentiations à trois; savoir, à la méthode pour différentier 1°. une somme ou une différence; 2°. un produit; 3°. une puissance: on les trouvera comprises dans le tableau suivant, en observant que le signe d mis devant une somme de termes compris entre deux parenthèses indique une différentielle à prendre. Ainsi $d.(x+y)$ signifie qu'il faut prendre la différentielle de $x+y$: on aura donc

1°. $d.\{X+Y-Z+A\} = dX+dY-dZ$,
2°. $d.\{XY\} = Y\,dX+X\,dY$,
3°. $d.(X^n) = n\,X^{n-1}\,d.X$.

Comme il est nécessaire de se rendre familière l'application de ces règles, je vais placer ici quelques exemples sur lesquels on pourra s'exercer.

Supposons qu'on ait les fonctions suivantes à différentier:

1°. $a+bx-cy$... on aura

$d.(a+bx-cy) = b\,dx - c\,dy$... (règl. 1re et 2e.)

2°. $\frac{a}{x}$... on aura

$$d.\frac{a}{x} = -\frac{a\,dx}{x^2} \text{ ... } d.\left(\frac{a+x}{x}\right) = d.\left(\frac{a}{x}+1\right) = -\frac{a\,dx}{x^2} \text{ ...}$$

$$d.\left(\frac{ay}{b-y}\right) = a.d.\left(\frac{b-y}{y}\right)$$

$$= a\left\{\frac{(b-y)dy+y\,dy}{(b-y)^2}\right\} = \frac{ab\,dy}{(b-y)^2} \text{ ... (règle 3e.)}$$

$3°.\ d.x^4 = 4x^3dx \ldots d.ax^5 = 5ax^4dx \ldots$

$d(a+bx^n) = nbx^{n-1}dx \ldots$

$d(ay^m + bx^n) = may^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx$...(règ. 4°.)

$4°.\ d.\sqrt{x} = d.x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1.dx}{2\sqrt{x}} \ldots$

$d.\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} \ldots$

$d.\sqrt{a^2+y^2} = d.(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2ydy$

$= \frac{ydy}{\sqrt{a^2+y^2}}$. (règle 5°.)

279. Ces règles s'appliquent immédiatement à la différentiation des monomes, et lorsque les fonctions à différentier sont des binomes ou des polynomes quelconques, on transforme la fonction de manière qu'elle se présente sous la forme d'un monome.

Cherchons pour exemple la différentielle de $(x^2+x^3)^n$, ... on aura

$$d.(x^2+x^3)^n = \{(x+dx)^2+(x+dx)^3\}^n - (x^2+x^3)^n.$$

Développons ces deux binomes, et puisqu'on néglige dans la différentielle les termes multipliés par les puissances supérieures de dx, ne poussons le développement dans chaque binome que jusqu'au second terme : on aura donc

$$d.(x^2+x^3)^n = \{x^2+2xdx+x^3+2x^2dx\ldots\}^n - (x^2+x^3)^n.$$

Faisons pour abréger,

$$x^2+x^3 = X,$$

on aura $\quad 2xdx+3x^2dx = dX,$

et par conséquent

$$d.(x^2+x^3)^n=(X+dX)^n-X^n=nX^{n-1}dX;$$

et remettant à la place de X et dX leurs valeurs, on aura

$$d.(x^2+x^3)^n=n(x^2+x^3)^{n-1}\times(2xdx+3x^2dx).$$

Prenons pour second exemple la fonction

$$\{a+bx^n+cx^p\}^q,$$

on aura

$$d.\{a+bx^n+cx^p\}^q=\{a+b(x+dx)^n+c(x+dx)^p\}^q - \{a+bx^n+cx^p\}^q.$$

Si on développe ces binomes jusqu'au second terme, on aura

$$\{a+bx^n+bnx^{n-1}dx+cx^p+cpx^{p-1}dx\}^q - \{a+bx^n+cx^p\}^q.$$

Faisons pour abréger,

$$a+bx^n+cxp=X\ldots$$

on aura comme dans l'exemple précédent

$$nbx^{n-1}dx+cpx^{p-1}dx=dX\ldots$$

donc

$$d.\{a+bx^n+cx^p\}^q=(X+dX)^q=qX^{q-1}d.X,$$

et en mettant à la place de X et dX leurs valeurs

$$=q\{a+bx^n+cx^p\}^{q-1}\times(nbx^{n-1}+cpx^{p-1})dx.$$

Soit enfin la fraction

$$\frac{(a+bx^n+cx^p)^q}{(p+qx+rx^2)^m}\ldots.$$

on fera le numérateur $=X$ et le dominateur $=Y$, et l'on aura

$$d.\left(\frac{X}{Y}\right)=\frac{YdX-Xdy}{Y^2};$$

mettant à la place de $X\,Y$, $d\,X$, $d\,Y$ leurs valeurs, on a

$$\frac{(p+qx+rx^4)^m\times n(a+bx^2+cx^3)^{n-1}\times(2bx+3cx^2)dx\}}{-(a+bx^2+cx^3)^n\times m(p+qx+rx^4)^{m-1}\times(q+4rx^3dy\}}$$
$$(p+q\,x+r\,x^4)^{2\,m}.$$

Donnons encore quelques exemples.

1°. Soit $$y=a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x}\ldots$$

on a

$$dy=b\,dx\,(\text{règle }5^e.)+\frac{c\,dx}{x^2}\,(\text{règle }3^e.)$$

réunissant ces deux termes, on a

$$dy=\left(\frac{b}{2\sqrt{x}}+\frac{c}{x^2}\right)dx.$$

2°. $$y=\frac{a}{x}+\frac{b}{\sqrt{x}}+\frac{c\,x}{\sqrt[3]{x}}:$$

l'application des règles précédentes donnera

$$dy=-\frac{a\,dx}{x^2}\,(\text{règle }3^e.)-\frac{b\,dx}{2\sqrt{x^3}}\,(\text{règle }3^e\text{ et }5^e.)$$

$$+\frac{2\,c\,dx}{3\sqrt[3]{x}}\,(\text{règle }5^e.)=\left(\frac{2\,c}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{b}{2\sqrt{x^3}}-\frac{a}{x^2}\right)dx.$$

3°. $$y=\sqrt{a+b\,x^n+c\,x^p}\ldots$$

on en déduit

$$dy=d.(a+bx^n+cx^p)^{\frac{1}{r}}$$
$$=\frac{1}{r}(a+b\,x^n+c\,x^p)^{\frac{1}{r}-1}\times(n\,b\,x^{n-1}+c\,p\,x^{p-1})\,dx.$$
$$=\frac{(n\,b\,x^{n-1}+c\,p\,x^{p-1})dx}{r\,(a+b\,x^n+c\,x^p)^{\frac{r-1}{r}}}.$$

On voit par tous ces exemples, et par les principes déjà posés, que si on a une équation à deux variables x et y à différentier, tous les termes de l'équation différentiée seront multipliés par dx ou dy: on en déduira donc facilement la valeur du rapport $\frac{dy}{dx}$: l'expression de ce rapport ne contenant pas dy ni dx dans le second membre sera donnée en quantités finies.

Soit l'équation

$$y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a} \quad (159-),$$

on a $$2y\,dy = p\,dx \pm \frac{2p}{2a} x\,dx,$$

ou $$\frac{dy}{dx} = \frac{p \pm \frac{px}{a}}{2\sqrt{px \pm \frac{px^2}{2a}}}$$

où l'on voit que le second membre de cette équation ne contient que des quantités finies.

Des différentielles secondes et des ordres supérieurs.

280. On a vu (247) que si l'on considère trois ordonnées consécutives PM, $P'M'$, $P''M''$, on a $RM' = \Delta y$, $R'M'' = \Delta y'$, et $\Delta y' - \Delta y = \Delta^2 y$: si les trois ordonnées sont infiniment près l'une de l'autre, Δy et $\Delta y'$ seront infiniment petites, et représentées par dy et dy'; mais parce que dy',

n'est pas égal à dy, à moins que la ligne $MM'M''$ ne soit droite, il y aura une différence entre dy' et dy, qu'on appellera différentielle seconde, on la désignera par $d\,dy$ ou d^2y.

Si les deux ordonnées $M''P''$, sont prises à distances égales, c'est-à-dire si $PP' = P'P''$, on a

$$\Delta^2 x = 0,$$

et si PP' est infiniment petit, on aura

$$d^2 x = 0;$$

mais si les ordonnées ne sont pas prises à distances égales, c'est-à-dire si les abscisses AP, AP', AP'' ne sont pas en progression arithmétique, les différentielles secondes de x ne seroient pas zéro : or puisque $PP', P'P''$ sont supposées infiniment peu différentes l'une de l'autre, leur différence $d\,dx$ est infiniment petite relativement à chacune d'elles; donc elle est infiniment petite du second ordre. Il en est de même de d^2y par rapport à dy, ainsi les termes d^2y, d^2x, sont de même ordre que les termes $dx^2, dy^2, dx\,dy$.

281. Pour avoir l'expression d'une différentielle seconde, on regardera dx et dy comme de nouvelles variables dans l'expression de la différentielle première; on la différentiera de nouveau en faisant varier x, y, dx et dy... et l'on suivra pour la différentiation les mêmes règles que pour les différentielles premières.

1°. Soit la fonction x^m dont on demande la différentielle seconde; on commencera par prendre la différentielle première

$$= m\,x^{m-1}\,dx;$$

on regardera ensuite cette quantité comme un nouveau produit composé des deux facteurs

$$m\,x^{m-1} \times dx:$$

en différentiant de nouveau, et regardant dx comme une nouvelle variable, on a

$$d.mx^{m-1}dx = mxm-1x^{m-2}dx^2 + mx^{m-1}d^2x. \quad (275).$$

Si on supposoit que dx est constant, on auroit simplement

$$d.mx^{m-1}dx = m.m-1x^{m-2}dx^2,$$

parce qu'alors on a

$$d^2x = 0.$$

2°. Supposons qu'on a déjà l'expression différentielle $y\,dx - x\,dy$, et qu'on en demande la différentielle.

Chaque terme est un produit de deux variables, on aura donc

$$d.(y\,dx - x\,dy) = y\,d^2x$$
$$+dy\,dx - x\,d^2y + dy\,dx = y\,d^2x - x\,d^2y.$$

Si on regarde dx comme constante, on n'aura qu'un seul terme

$$-x\,d^2y;$$

si c'est dy qui est constant, on aura

$$y\,d^2x.$$

3°. Soit proposé de différentier l'expression $\frac{dy}{dx}$, en faisant tout varier, on a

$$d.\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}.$$

4°. Soit l'expression $\frac{y\,dx}{dy}$, dont on cherche la

différentielle en faisant tout varier; on aura

$$d.\left(\frac{ydx}{dy}\right)=\frac{ydyd^2x+dy^2dx-ydxd^2y}{dy^2}.$$ (règ. 2 et 3.)

5°. Soit l'équation

$$y=\sqrt{px\pm\frac{px^2}{2a}};$$ (159)

dont on demande la différentielle seconde en faisant dx constant.

Cette équation différentiée une fois (279), a donné

$$dy=\frac{\left(p\pm\frac{px}{a}\right)dx}{2\sqrt{px\pm\frac{px^2}{2a}}};$$

en la différentiant une seconde fois, on a

$$d^2y=\frac{\pm\frac{p}{a}dx^2}{2\sqrt{px\pm\frac{px^2}{2a}}}-\frac{\left(p\pm\frac{px}{a}\right)^2dx^2}{4.\left(px\pm\frac{px^2}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si on réduit au même dénominateur, on aura

$$d^2y=\frac{-p^2}{4\left(px\pm\frac{px^2}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{p^2}{4y^3}$$ (91).

6°. Soit l'équation

$$y\pm q=\sqrt{R^2-(x-p)^2};$$

en la différentiant une fois, on a

dy

$$dy = \frac{-(x-p)\,dx}{\sqrt{R^2-(x-p)^2}} \cdots$$

différentiant une seconde fois, et prenant dx constant, on a

$$d^2y = \frac{-dx^2}{\sqrt{R^2-(x-p)^2}} + \frac{(x-p)^2 \cdot dx^2}{(R^2-(x-p)^2)^{\frac{3}{2}}};$$

réduisant au même dénominateur,

$$d^2y = \frac{-R^2dx^2}{(R^2-(x-p)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-R^2dx^2}{(y \pm q)^{\frac{3}{2}}}. \quad (91)$$

282. On trouvera avec la même facilité, et par les mêmes règles, les différentielles troisièmes et celles des ordres supérieurs : nous n'en donnerons qu'un exemple, dans lequel nous supposerons dx constant, comme cela se pratique ordinairement.

On demande la différentielle de l'expression

$$R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx.d^2y};$$

les deux variables sont dy, et d^2y : la différentielle de d^2y sera désignée par d^3y, et sera infiniment petite du troisième ordre. En appliquant à cet exemple les règles prescrites pour les différentielles premières, on a

$$d.\left(\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx\,d^2y}\right)$$

$$= \frac{\frac{3}{2}dy.(d^2y)^2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} - d^3y\,(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx.(d^2y)^2}.$$

On fera ici la même remarque que dans les diffé-

rentielles premières; savoir, que si on a une équation différentielle à différentier de nouveau, tous les termes de la différentielle seconde seront multipliés par d^2y, d^2x, $dx\,dy$, dx^2, dy^2; et si dx est constant, on aura toujours l'expression du rapport $\frac{d^2y}{dx^2}$ en quantités finies.

Différentiation des fonctions transcendantes.

283. Après les fonctions algébriques viennent les fonctions qui contiennent des logarithmes, des exponentielles, des arcs de cercle, des sinus, des cosinus, des tangentes, des cotangentes... etc. et qu'on nomme transcendantes. Nous allons apprendre à les différentier.

Différentielles des quantités logarithmiques.

284. Soit l'équation

$$y = \log x;$$

si on suppose que y devienne $y+dy$ lorsque x devient $x+dx$, on aura

$$y+dy = \log(x+dx) = \log x + \log\left(1+\frac{dx}{x}\right):$$

donc

$$dy = \log\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2\cdot x^2} + \frac{dx^3}{3\,dx^3} - \ldots$$

Le premier terme de ce développement est multiplié par dx, et les suivans par les puissances suc-

cessives de dx ; donc ils doivent être négligés comparativement au premier : on aura donc

$$dy = \frac{dx}{x},$$

d'où on déduit la règle suivante.

La différentielle du logarithme d'une quantité variable est égale à la différentielle de la quantité divisée par cette même quantité.

Cette manière de différentier les quantités algébriques se rapporte aux logarithmes naturels, ou de Nepper ; c'est-à-dire au système de logarithmes dont le module est 1. Pour tout autre système, il faudroit multiplier la différentielle déjà trouvée par le module ; ainsi on aura généralement

$$d.\log x = M.\frac{dx}{x},$$

M étant le module.

Comme il est aisé de transformer les logarithmes naturels en tel autre système qu'on voudra (101), nous ne nous occuperons que de la différentiation des logarithmes naturels ; c'est-à-dire que nous supposerons $M = 1$: donnons quelques exemples.

1°. $$d.\log ax = \frac{a\,dx}{ax} = \frac{dx}{x};$$

c'est-à-dire que la différentielle du logarithme de ax est la même que celle du logarithme de x, ce qui se conçoit aisément : en effet

$$\log ax = \log a + \log x;$$

mais $\log a$ est une constante dont la différentielle est zéro : on aura donc

$$d.\log ax = d.\log x = \frac{dx}{x}.$$

2°. $d.\log(a^2+x^2)=\frac{2x\,dx}{a^2+x^2}$....

et $d.\log(xy)=\frac{y\,dx+x\,dy}{xy}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$.

3°. Pour prendre la différentielle de l'expression $\log\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, on cherchera à le ramener par des substitutions à la forme d'un monome : on fera par exemple

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=z,$$

et par conséquent

$$dz=d.\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)=\frac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc

$$d.\log\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)=\frac{dz}{z}=\frac{a^2\,dx}{x\,(a^2+x^2)}.$$

4°. Soit $y=\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$,

on aura

$$dy=\frac{dx+\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

5°. Soit $y=\log\left\{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right\}$;

avant de différentier cette expression, il sera plus simple de multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$; elle deviendra

$$y = \log \frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}} = \log x - \log(1-\sqrt{1-x^2});$$

donc
$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2-1+x^2)}} = \frac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

6°. Soit $y = \log\left\{\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{x-\sqrt{a^2+x^2}}\right\}$

$= \log(x+\sqrt{a^2+x^2}) - \log x - (\sqrt{a^2+x^2})$;

donc
$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

7°. Soit $y = (\log x^n)^m$;

on fera $\log x^n = u$, et $n\frac{dx}{x} = du$;

on aura ainsi

$$(\log x^n)^m = u^m \ldots$$

$$d.(\log x^n)^m = m u^{m-1}\,du = m n \frac{dx}{x}(\log x^n)^{m-1}.$$

8°. Soit $y = \log\log x \ldots$

on fera $\log x = u$,

et l'on aura $\log u = \log\log x$;

donc $d(\log\log x) = \frac{du}{u} = \frac{dx}{x\log x}$.

Les différentielles premières des fonctions logarithmiques que nous venons d'examiner étant des fonctions algébriques, ou ne contenant tout au plus que des facteurs logarithmiques, comme dans les deux derniers exemples, il sera facile d'en prendre les différentielles secondes.

Soit pour premier exemple

$$y = \log \left\{ \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}} \right\} :$$

on a par une première différentiation

$$dy = \frac{2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}};$$

différentiant de nouveau en faisant dx constante

$$d^2y = -\frac{2x\,dx^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit encore $y = (\log x^n)^m$:

on a déjà $dy = mn\frac{dx}{x}(\log x^n)^{m-1}$;

et par une seconde différentiation on aura

$$d^2y = -mn\frac{dx^2}{x^2}(\log x^n)^{m-1}$$

$$+n.m.m-1\frac{dx^2}{x^2}(\log x^n)^{m-2}.$$

Différentiation des fonctions exponentielles.

285. 1°. Si l'on a l'équation $y = a^x$, on aura par la différentiation

$$dy = d.a^x :$$

prenons le logarithme des deux membres de l'équation proposée

$$\log y = x \log a :$$

donc

$$\frac{dy}{y} = dx \log a, \text{ et } dy = y\,dx \log a = a^x dx \log a :$$

donc $$d.a^x = a^x.dx \log a ;$$

d'où il suit que *pour avoir la différentielle d'une quantité exponentielle a^x, il faut multiplier la quantité a^x par la différentielle de son exposant et par le logarithme de la quantité constante a.*

Si on avoit $y = e^x$ on auroit

$$dy = e^x dx \log e ;$$

mais parce que e représente la base des logarithmes naturels (107) $\log e = 1$, donc

$$dy = dx\, e^x :$$

on aura aussi en supposant dx constant,

$$d^2y = dx^2\, e^x \ldots d^3y = dx^3\, e^x.$$

2°. Si l'on a l'équation $y = X^x$, on en déduira

$$\log y = \log X, \text{ et } \frac{dy}{y} = dx \log X + x\frac{dX}{X}.$$

donc dy, ou $d.X^x = \left\{ dx \log X + x\frac{dX}{X} \right\} X^x.$

3e. Soit $y = a^{b^x} \ldots$

donc

$$\log y = b^x \log a, \text{ et } \frac{dy}{y} = b^x dx \log b \log a;$$

d'où on déduit

$$dy, \text{ ou } d.a^{b^x} = a b^x \times b^x dx \log b \log a.$$

4e. Soit enfin $y = X^z \log Z$,

X et Z étant des fonctions de x : on a

$$\log y = x \log X + \log \log Z \ldots$$

donc

$$\frac{dy}{y} = dx \log X + x \frac{dX}{X} + \frac{dZ}{Z \log Z},$$

ce qui donne

$$dy = X^x \log Z \left\{ dx \log X + x \frac{dX}{X} + \frac{dZ}{Z \log Z} \right\}.$$

Différentiation des fonctions circulaires.

286. Soit un arc ou un angle quelconque variable représenté par x, et son sinus représenté par y ; on aura l'équation

$$y = \sin x :$$

si on suppose que y devienne $y + dy$ lorsque l'arc x devient $x + dx$, on aura

$$y + dy = \sin (x + dx) = \sin x \cos dx + \sin dx \cos x;$$

mais on a

$$\cos dx = 1 - \frac{dx^2}{2} + \ldots \text{etc.}$$

et $$\sin dx = dx - \frac{dx^3}{2.3} + \ldots \text{etc.} \quad (112)$$

donc en négligeant les termes qui contiennent les puissances de dx supérieures à la première, on aura $\sin(x+dx) = \sin x + dx \cos x$,

et par conséquent

$$dy, \text{ ou } d.\sin x = dx \cos x :$$

d'où on déduit la règle suivante.

La différentielle du sinus d'un arc est égale à la différentielle de l'arc multipliée par le cosinus.

2°. Soit $y = \cos x$:

donc

$$y + dy = \cos(x+dx) = \cos x \cos dx - \sin x \sin dx,$$

et mettant à la place de $\cos dx$ et $\sin dx$ leurs valeurs en série développée jusqu'à la première puissance de dx, on a

$$\cos x + dx = \cos x - dx \sin x :$$

donc dy, ou $d.\cos x = -dx \sin x$;

c'est-à-dire que *la différentielle d'un cosinus ou d'un angle est égale à la différentielle négative de l'arc, multipliée par le sinus du même arc.*

3°. Soit $y = \text{sin vers } x = 1 - \cos x$:

on aura $dy = dx \sin x$;

c'est-à-dire que *la différentielle du sinus verse d'un arc ou d'un angle, est égale à la différentielle de l'arc multipliée par le sinus.*

4°. Soit $y = \text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

on a

$$dy = d.\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\, d.\sin x - \sin x\, d.\cos x}{\cos x^2}$$

$$dx\left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

d'où on conclut *que la différentielle de la tangente d'un arc ou d'un angle est égale à la différentielle de l'arc divisée par le quarré du cosinus.*

5°. Soit $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

on aura

$$dy = d.\frac{\cos x}{\sin x} = -dx\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = -\frac{dx}{\sin^2 x};$$

c'est-à-dire *que la différentielle de la cotangente d'un arc ou d'un angle à la différentielle négative de l'arc divisée par le quarré du sinus.*

6°. Soit $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$:

on aura

$$dy = \frac{dx \sin x}{\cos^2 x} = dx \,\text{tang}\, x \sec x.$$

7°. Soit $y = \text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$:

donc

$$dy = -\frac{dx \cos x}{\sin^2 x} = -dx \cot x \,\text{cosec}\, x :$$

ces formules suffisent pour différentier toute fonc-

tion contenant des sinus, des cosinus, des tangentes, des cotangentes, des sécantes, des cosécantes.

Exemples :

Soit $y = (\sin x)^m \ldots$

on a $dy = m(\sin x)^{m-1} \times dx \cos x.$

Soit $y = (\sin x)^m \times (\cos x)^p \ldots$

on aura

$$dy = m\,dx\,(\cos x)^{p+1} \times (\sin x)^{m-1} - p\,dx\,(\sin x)^{m+1} \times (\cos x)^{p-1}.$$

Soit encore $y = \dfrac{(\sin x)^m}{(\cos x)^p} \ldots$

on aura

$$dy = \frac{m dx (\cos) x^{p+1} \times (\sin x)^{m-1} + p dx (\sin x)^{m+1} (\cos x)^{p-1}}{(\cos x)^{2p}}.$$

On voit par tout ce que nous venons de dire, et par les exemples précédens, que la différentielle des sinus, cosinus, tang. . . &c. dépend de la différentielle de l'arc; d'où on peut conclure, réciproquement, que la différentielle de l'arc dépend de celle du sinus ou du cosinus, ou. . . &c. Ainsi de l'équation

$$d \sin x = dx \cos x,$$

on peut conclure

$$dx = \frac{d.\sin x}{\cos x};$$

c'est-à-dire *que la différentielle de l'arc est égale à celle du sinus divisée par le cosinus.*

Par la même raison, de l'expression

$$d.\cos x = -dx \sin x,$$

on déduit $dx = \frac{-d.\cos x}{\sin x}$;

c'est-à-dire *que la différentielle de l'arc est égale à la différentielle négative du cosinus divisée par le sinus.*

On a encore

$$d.\text{tang}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

par conséquent.

$$dx = d.\text{tang}\, x \cos^2 x,$$

et parce que $\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x}$, on a

$$dx = \frac{d.\text{tang}\, x}{\sec^2 x}.$$

Le rayon des tables étant pris pour l'unité, comme cela se pratique dans le calcul des sinus; si on désigne par y le sinus d'un arc x, $\sqrt{1-y^2}$ en sera le cosinus : on aura donc pour la première expression de la différentielle de l'arc x...

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Si on fait le cosinus du même arc $= z$, son sinus sera $\sqrt{1-z^2}$,

et la seconde expression de la différentielle de l'arc sera

$$dx = \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Enfin si l'on fait la tangente du même angle $= u$, la sécante sera $\sqrt{1+u^2}$;

donc la troisième expression de la différentielle de l'arc sera $dx = \frac{du}{1+u^2}$.

Exemple : Soit φ un arc, ou un angle dont le sinus est $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$:

on fera $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = z$,

et l'on aura $d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$;

mais

$$dz = d.\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \left(dy.\sqrt{1-y^2} + \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)$$

$$= \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-\frac{y^2}{1-y^2}} = \sqrt{\frac{1-2y^2}{1-y^2}}$;

donc $d\varphi = \frac{dy}{(1-y^2)\sqrt{1-2y^2}}$.

Application du calcul différentiel à la solution du problème des tangentes.

287. Un des problèmes les plus intéressans dans la théorie des lignes courbes est celui qui apprend à déterminer la position de la tangente pour un point donné de la courbe dont on a l'équation ; c'est ce problème qui a donné naissance au calcul

différentiel (158) qu'on appelle pour cette raison la méthode directe des tangentes, parce que toute équation différentielle peut être considérée comme déterminant la position d'une tangente : en effet la position de la tangente est déterminée quand on connoît la longueur de la soutangente (157) : soit
Fig. 54. donc AMk, une courbe dont les ordonnées sont parallèles entr'elles, et perpendiculaires à l'axe des abscisses ; menons par le point M la tangente MT et la normale MH ; soit menée l'ordonnée pm infiniment près de PM, et la petite droite Mk parallèle à l'axe AX : cette ligne infiniment petite est la différentielle de l'abscisse AP ; rm est la différentielle de l'ordonnée correspondante PM, et la petite ligne Mm est la différentielle de l'arc AM.

Si l'on considère la courbe AMK comme un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits, le petit arc de la courbe Mm peut être regardé comme une ligne droite qui est tout à-la-fois l'élément de l'arc et celui de la tangente, ou ce qui revient au même, la tangente peut être considérée comme le prolongement du côté infiniment petit Mm. Cela posé :

Soit l'abscisse $AP = x$, l'ordonnée $PM = y$, $Pp = Mr = dx$, $mr = dy$, $Mm = ds$; la tangente $MT = T$, la soutangente $PT = R$, la normale $MH = N$, la sous-normale $PH = M$. Le triangle infiniment petit Mmr est semblable au triangle TPM ; on aura donc les proportions suivantes :

$$rm : Mr :: PM : PT, \text{ ou } dy : dx :: y : R ;$$

donc
$$R = \frac{y\,dx}{dy}.$$

$$rm : Mm :: PM : MT, \text{ ou } dy : ds :: y : T ;$$

donc $$T=\frac{y\,ds}{dy}.$$

$Mr:mr::PM:PH$, ou $dx:dy::y:M$;

donc $$M=\frac{y\,dy}{dx}.$$

$Mr:Mm::PM:MH$, ou $dx:ds::y:N$;

donc $$N=\frac{y\,ds}{dx}.$$

La première de ces formules indique que la soutangente est égale à l'ordonnée divisée par le rapport $\frac{dy}{dx}$, ou multipliée par le rapport $\frac{dx}{dy}$: donc pour avoir l'expression de la soutangente dans une courbe dont l'équation est connue, on différentiera cette équation ; on déduira de l'équation différentiée la valeur du rapport $\frac{dx}{dy}$, et l'on multipliera son expression par celle de l'ordonnée y ; et comme toute équation différentiée donne la valeur du rapport $\frac{dy}{dx}$, ou $\frac{dx}{dy}$, une pareille équation pourra toujours être considérée comme déterminant la position de la tangente à un point quelconque de la courbe dont on a l'équation ; ainsi tous les problèmes de calcul différentiel se réduisent à celui des tangentes, c'est la raison pour laquelle ce calcul est appelé aussi la méthode des tangentes.

Exemples : Supposons qu'on demande l'expression de la soutangente dans la parabole, dont l'équation rapportée à l'axe est $y^2=px$; en la différentiant, on a

$$2y\,dy=p\,dx,$$

d'où on déduit

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{p}.$$

Multipliant les deux membres par y, on a

$$\frac{y\,dx}{dy}=\frac{2y^2}{p}=2x;$$

mais $\frac{y\,dx}{dy}$ est l'expression générale de la soutangente ; donc dans la parabole $R=2x$.

L'équation à l'ellipse rapportée à l'axe est

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2):$$

en la différentiant, on a

$$2y\,dy=-\frac{2b^2x\,dx}{a^2};$$

d'où on déduit

$\frac{dx}{dy}=-\frac{a^2y}{b^2.x}$; multipliant par y, on a

$$\frac{y\,dx}{dy}=-\frac{a^2y^2}{b^2.x}=-\left(\frac{a^2-x^2}{x}\right):$$

donc dans l'ellipse $R=-\left(\frac{a^2-x^2}{x}\right)$: le signe négatif indique qu'il auroit fallu écrire

$$-\frac{y\,dx}{dy}=\frac{a^2-x^2}{x};$$

parce que l'origine des abscisses étant au centre de l'ellipse, les ordonnées diminuent lorsque les abscisses augmentent, et réciproquement ; donc il faut

faut écrire $-dy$ lorsque dx est positif, ou $-dx$ lorsqu'on écrit $+dy$.

Dans l'hyperbole on a

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)\ldots$$

donc $$y\,dy = \frac{b^2 x\,dx}{a^2},$$

d'où on déduira

$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{x^2 - a^2}{x}.$$

L'équation de la logarithmique est

$$y = e^{\frac{x}{m}} \text{ (201)};$$

en la différentiant, on a

$$dy = \frac{dx}{m} e^{\frac{x}{m}} = y\,\frac{dx}{m},$$

d'où on déduit

$$\frac{y\,dx}{dy} = m;$$

c'est-à-dire que dans la logarithmique, la soutangente est constante et égale au module (201).

289. L'expression générale de la sous-normale est $\frac{y\,dy}{dx}$:

ainsi pour avoir l'expression de la sous-normale dans une courbe donnée, on différentiera l'équation de la courbe; on fera en sorte d'avoir dans un membre de l'équation $\frac{y\,dy}{dx}$, et le second membre égal à celui-ci sera l'expression de la sous-normale.

L'équation de la parabole est

$$y^2 = px :$$

en la différentiant on a

$$2y\,dy = p\,dx.$$

Divisant les deux membres par $2\,dx$, on a

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{p}{2} :$$

donc dans la parabole la sous-normale est constante et égale à la moitié du paramètre.

L'équation à l'ellipse et à l'hyperbole différentiée donne

$$2y\,dy = \pm \frac{2b^2}{a^2}\,x\,dx,$$

d'où on déduit

$$\frac{y\,dy}{dx}, \text{ ou } M = \pm \frac{b^2 x}{a^2}.$$

L'élément de l'arc Mm ou ds est l'hypothénuse d'un triangle rectangle infiniment petit, dont les deux côtés sont dx, dy; on-aura donc

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \ldots$$

ou $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, et $\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$;

ainsi l'expression générale de la tangente T sera

$$\sqrt{y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2}};$$

et celle de la normale N sera

$$\sqrt{y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}}.$$

On aura donc dans la parabole,

$$T = \sqrt{px + 4x^2}, \text{ et } N = \sqrt{px + \frac{p^2}{4}}.$$

Observations générales sur les principes du calcul différentiel.

290. Les principes du calcul différentiel, tels qu'on vient de les présenter, n'ont pas le degré d'évidence qui caractérise les vérités mathématiques; on y suppose, 1°. les quantités infiniment petites comme des quantités réelles : or il a été démontré dans plusieurs articles de cet ouvrage que les quantités infiniment petites ne sont autre chose que la limite des quantités finies; c'est-à-dire le terme dont elles approchent de plus en plus dans leur décroissement sans jamais y arriver, mais dont elles peuvent ne différer qu'aussi peu qu'on voudra : 2°. on y suppose des quantités infiniment petites de plusieurs ordres, supposition dépendante de la première, mais impossible à concevoir : 3°. on y suppose généralement que les différentielles secondes sont infiniment petites du second ordre; mais toute différentielle seconde est la différence entre deux différentielles premières : or rien n'empêche de concevoir une différence entre deux grandeurs de même ordre que les grandeurs dont elle est la différence. La différence entre deux grandeurs finies est presque toujours une grandeur finie; donc la différence entre deux grandeurs infiniment petites peut être infiniment petite du premier ordre : 4°. en négligeant dans le calcul des quantités infiniment plus petites que celles qu'on laisse subsister, on donne lieu à des

erreurs, et si les résultats s'accordent avec ceux qu'on obtient par une analyse plus rigoureuse, c'est parce que les erreurs qui naissent des procédés même du calcul sont redressées et compensées par la manière de les appliquer à la résolution des questions. Par exemple, en regardant la courbe
Fig. 54. AMK comme un polygone d'un nombre infini de côtés chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente TM, il est clair qu'on fait une supposition erronnée, car le petit côté prolongé ne peut être qu'une véritable sécante; mais l'erreur est détruite par une autre erreur qu'on introduit dans le calcul, en y négligeant comme nulles des quantités qui selon la supposition ne sont qu'infiniment petites. Le calcul différentiel présenté sous ce point de vue, n'est donc qu'un calcul d'erreurs compensées; il importe de l'asseoir sur des principes plus solides, en faisant disparoître les difficultés qui arrêtent ceux qui entreprennent de l'étudier.

Méthode des limites.

291. Nous avons dit, dans plusieurs articles de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de la Géométrie, ce qu'on entend par limite d'un rapport ou d'une expression algébrique, composée de constantes et de variables qui peuvent recevoir toutes sortes d'accroissemens ou de décroissemens. Nous avons fait de fréquentes applications de la méthode des limites dans la géométrie: pour faire sentir l'analogie de cette méthode avec le calcul différentiel, nous allons l'appliquer à la méthode des tangentes.

Soit une courbe quelconque

AMM';

par les points MM' menons la sécante SMM', et par le point M la tangente MT; la partie de l'axe PS sera la sous-sécante, et la partie PT sera la sous-tangente. Fig. 51.

Soient menées aux deux points d'intersection de la sécante avec la courbe deux ordonnées PM, $P'M'$: si on fait $AP = x$, $PM = y$, on aura

$$MR = \Delta x, \quad RM' = \Delta y;$$

les deux triangles semblables MRM', PMS donnent l'équation

$$\frac{RM'}{MR} = \frac{PM}{PS};$$

on a par conséquent le rapport

$$\frac{PM}{PT} < \frac{RM'}{MR}, \text{ ou } \frac{y}{PT} < \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

(Le premier rapport seroit plus grand que le second si la courbe étoit concave du côté de l'axe.) Plus le point d'intersection M' approchera de M, plus le point S sera près du point T, et par conséquent plus le rapport $\frac{PM}{PS}$, ou $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ approchera du rapport $\frac{PT}{y}$: le premier de ces rapports pourra approcher du second aussi près qu'on voudra, puisque PS peut différer aussi peu qu'on voudra de PT; donc $\frac{PT}{y}$ est la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: cherchons l'expression de la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; elle sera la valeur de $\frac{y}{PT}$, parce que deux rapports

qui sont tous les deux les limites d'un même rapport sont égaux entr'eux. (*Géom.* 8, VII.)

Pour désigner la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on se sert d'un signe particulier qui est $\frac{dy}{dx}$.

La sous-sécante PS ne devient la soutangente PT que lorsque le point M' se confond avec M, ou ce qui revient au même, le rapport $\frac{y}{PS}$ ne devient $\frac{y}{PT}$, que lorsque $\Delta x = 0$, et $\Delta y = 0$; donc pour avoir l'expression de la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, il faut prendre la différence finie de l'équation de la courbe, laisser dans un membre le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, qu'on changera en $\frac{dy}{dx}$, pour avertir que c'est la limite; égaler ensuite à zéro tous les termes qui se trouveront multipliés par Δx ou Δy; les termes restans seront l'expression de $\frac{dy}{dx}$ en termes finis.

Soit la courbe proposée une parabole dont l'équation est $y^2 = px$:

si on en prend la différence finie, on aura

$$2y\Delta y + \Delta y^2 = p\Delta x,$$

d'où on déduit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{2y + \Delta y};$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y};$$

mais $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{PT},$$

parce que ces deux expressions sont la limite d'un même rapport $\frac{y}{PS}$: on a donc

$$\frac{y}{PT} = \frac{p}{2y}, \text{ ou } PT = \frac{2y^2}{p} = 2x,$$

comme on l'a déjà trouvé (288).

292. L'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$ donnée par la méthode des limites, mène directement à l'équation

$$2y\,dy = p\,dx,$$

qui est la différentielle de l'équation

$$y^2 = px;$$

donc la méthode des limites mène au même résultat que le calcul différentiel : il y a pourtant une différence entre ces deux méthodes, en ce que dans la première on ne fait pas entrer séparément dans le calcul les quantités qui expriment les accroissemens correspondans de l'abscisse et de l'ordonnée, ni même leur rapport exprimé par $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, mais seulement la limite ou dernière valeur de ce rapport exprimé par $\frac{dy}{dx}$: la valeur de cette limite est toujours une quantité finie, et comme on n'obtient l'expression de cette limite qu'en faisant Δx et $\Delta y = 0$, il s'ensuit que les quantités qu'on néglige

sont négligées non, comme on le dit ordinairement, parce qu'elles sont infiniment petites par rapport à celles qu'on laisse subsister, ce qui ne produit qu'une erreur infiniment petite ou nulle, mais parce qu'elles sont véritablement zéro : il ne s'agit pas de quantités infiniment petites dans la méthode des limites, mais seulement de quantités finies. On peut étendre ces observations aux différentielles du second ordre : dans la méthode des limites il n'est jamais question de quantité représentée par d^2y considéré séparément ; mais d^2y doit toujours être divisé par dx^2 : or $\frac{d^2y}{dx^2}$ désigne une quantité finie.

En effet $\frac{dy}{dx}$ désigne une quantité finie qu'on peut représenter généralement par Fx ; et si on appelle p l'expression de la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on aura

$$p = F'x \ldots$$

Cherchons la différence finie de cette fonction en mettant $x + \Delta x$ à la place de x : on aura

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = F''x + \frac{\Delta x}{2} F'''r + \ldots \&c.$$

Prenons la limite de ce rapport, que nous obtiendrons en faisant $\Delta x = 0$, nous aurons

$$\frac{dp}{dx} = F''x ;$$

mais $$dp = d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

en faisant dx constant; donc $\frac{d^2y}{dx^2} = F''x =$ une fonction finie de x.

293. Pour donner plus de développement et de généralité à cette méthode des limites, prenons l'équation d'une courbe quelconque $y = Fx\ldots$ Fig. 51. Si on suppose que l'ordonnée PM devienne $P'M' = y + \Delta y$ lorsque AP devient $AP' = x + \Delta x$, on aura généralement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'.x + \frac{\Delta x}{2}F''.x + \frac{\Delta x^2}{2.3}F'''.x + \ldots \&c.$$

A la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on doit avoir $\Delta x = 0$;

donc $$\frac{dy}{dx} = F'.x\ldots$$

Cette dernière équation peut se mettre sous cette forme

$$dy = dx\,F'x,$$

qui est précisément celle que l'on eût trouvée si on eût pris la différentielle de l'équation $y = F.x$.

Exemples : Soit $y = ax^m$, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\left\{mx^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}\Delta x.x^{m-2} + \ldots\right\}$$

A la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on a

$$\Delta x = 0;$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = amx^{m-1}, \text{ ou } dy = amx^{m-1}dx.$$

Soit $y = xz\ldots$ on aura

$$\Delta y = x\,\Delta z + z\,\Delta x + \Delta x\,\Delta z;$$

donc $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x\frac{\Delta z}{\Delta x} + z + \Delta z\ldots$$

A la limite, Δx et $\Delta z = 0$;

donc $$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z,$$

et par conséquent

$$dy = x\,dz + z\,dx,$$

comme par le calcul différentiel.

Soit $y = \log x\ldots$ on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{2.x^2} + \frac{\Delta x^2}{3x^3}\ldots.$$

A la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on a

$$\Delta x = 0;$$

donc $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ ou } dy = \frac{dx}{x}. \quad (284)$$

Soit $y = a^x\ldots$ on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\left\{\log a + \frac{\Delta x}{2}(\log a)^2 + \ldots\right\}$$

A la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on a toujours

$$\Delta x = 0;$$

donc $$\frac{dy}{dx} = a^x \log a,$$

et par conséquent

$$dy = a^x dx \log a.$$

Soit $y = \sin x$, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x - \frac{\Delta x}{2} \sin x + \ldots$$

d'où on déduira

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \text{ ou } dy = dx \cos x.$$

Soit encore $y = \cos x$, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x - \frac{\Delta x}{2} \cos x + \ldots$$

donc à la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x, \text{ ou } dy = -dx \sin x.$$

On voit par tous ces exemples que la méthode pour avoir l'expression de la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ conduit au même résultat que le calcul différentiel : dans l'une et l'autre méthode on cherche la différence finie de la fonction proposée ; on néglige ensuite les termes multipliés par $\Delta x^2, \Delta x \Delta y, \Delta y^2 \ldots$ &c. Dans le calcul différentiel on les néglige, parce qu'ils sont infiniment petits comparativement à ceux qu'on laisse subsister : dans la méthode des limites on les néglige, parce que la valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'est l'expression de sa limite que lorsque tous les termes contenant $\Delta x^2 \ldots$ &c. ont disparu ; c'est-à-dire lorsque Δx, Δy sont zéro.

294. Voici encore une application importante de la méthode des limites. On a vu (248), que si y est l'ordonnée d'une courbe répondant à l'abscisse x, l'ordonnée y répondant à l'abscisse $x+n\Delta x$ est

$$Y=y+n\Delta y+\frac{n.n-1}{2}\Delta^2 y+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}\Delta^3 y$$

$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\Delta^4 y+\ldots\&c.$$

On peut transformer cette formule en la suivante :

$$Y=y+n\Delta x.\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{n.n-1}{2}\Delta x^2\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

$$+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}\Delta x^3\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}+\ldots\&c.$$

Soit représentée par q la distance $n\Delta x$ qui sépare les deux ordonnées Y, y : on aura

$$n\Delta x=q, \text{ et } \Delta x=\frac{q}{n};$$

cette valeur substituée dans la formule précédente, donne

$$Y=y+q.\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{1.1-\frac{1}{n}}{2}q^2.\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

$$+\frac{1.1-\frac{1}{n}.1-\frac{2}{n}}{2.3}q^3.\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}+\ldots\&c.$$

L'équation $n\Delta x=q$ donne la proportion

$$\frac{1}{\Delta x}:n::1:q;$$

donc le rapport de $\frac{1}{\Delta x} : n$ est constant, et $= 1 : q$; par conséquent plus Δx sera petit, plus n sera grand : si on suppose Δx plus petit que la plus petite grandeur assignable, c'est-à-dire si on divise l'intervalle q en un nombre de parties plus grand que tout nombre assignable, on aura

$$\frac{1}{n} = 0,$$

et l'expression $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ deviendra celle de la limite de ce rapport : négligeant donc les termes $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots$ qui sont nuls dans l'expression de la limite ; et changeant le signe Δ en d, on a

$$Y = y + q\frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{q^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} \ldots \text{ \&c.}$$

Telle est l'expression de l'ordonnée Y répondant à l'abscisse $x+q$, et ne dépendant que des puissances successives de l'accroissement q et des limites $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ &c. Si on vouloit l'expression de l'ordonnée répondant à l'abscisse $x - q$, il suffiroit de changer dans la précédente $+q$ en $-q$, ce qui donnera pour les deux cas

$$Y = y \pm q\frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{q^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} \pm \ldots \text{\&c.}$$

Cette formule est le fameux théorême de Taylor,

qu'on peut regarder comme le fondement du calcul différentiel. Il est de la plus grande utilité pour développer telle fonction qu'on voudra, selon les puissances de l'accroissement de la variable.

Si l'on représente par f l'ordonnée qui répond à l'abscisse zéro, et qu'on mette x à la place de q, on aura pour développement de l'ordonnée qui répond à l'abscisse x

$$y=f+x\frac{df}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{x^3}{2.3}\frac{d^3f}{dx^3}+\text{...\&c. (91 et suiv.)}$$

Le théorême de Taylor ainsi modifié, donne le moyen de développer une fonction de x selon les puissances de x; il suffit de prendre les différentielles successives de la fonction et de supposer ensuite $x=0$.

Exemple : Soit $y=(a+x)^m$... en faisant $x=0$, on a

1°. $f=a^m$...

2°. $\frac{df}{dx}=m(a+x)^{m-1}$, et $=ma^{m-1}$,

lorsque $x=0$...

3°. $\frac{d^2f}{dx^2}=m.m-1(a+x)^{m-2}=m.m-1a^{m-2}$,

lorsque $x=0$... donc

$$y, \text{ ou } (a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m.m-1}{2}a^{m-2}x^2+\text{...}$$

Soit $y=\log(a+x)$: lorsque $x=0$, on a

1°. $f=\log a$...

2°. $\frac{df}{dx}=\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}$;

dans la même supposition.

3°. $\frac{d^3 f}{dx^3} = -\frac{1}{(a+x)^3} = -\frac{1}{a^3} \ldots$

4°. $\frac{d^4 f}{dx^4} = +\frac{2}{(a+x)^3} = +\frac{2}{a^3} \ldots$ &c.

donc

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3x^3} - \ldots \text{&c.} \quad (102)$$

Observations générales sur la méthode des limites.

295. Si la méthode des limites étoit toujours aussi facile à mettre en usage que le calcul différentiel, elle seroit préférable à tous égards; car on ne sauroit disconvenir que les principes qu'elle emploie ne soient très-rigoureux : cependant elle donne lieu à quelques difficultés qu'il est bon de connoître.

1°. La détermination de la tangente des courbes par la méthode des limites suppose que la tangente est la limite des sécantes, ou la soutangente la limite des sous-sécantes; ce qui n'est pas rigoureusement vrai, parce que, selon la définition de la limite, celle de la sous-sécante est le terme dont elle approche de plus en plus sans jamais y arriver, mais dont elle peut ne différer qu'aussi peu qu'on voudra : or on conçoit, 1°. que la sous-sécante peut devenir soutangente; 2°. que lorsque la sécante MT' est devenue la tangente MS, rien n'empêche de la concevoir tournant encore sur le point M, et redevenir sécante MT: ce n'est donc qu'en considérant les limites d'une manière particulière, comme nous l'avons fait n°. (177), qu'on peut s'en servir pour déterminer les soutangentes.

2°. Pour déterminer la limite ou dernier rapport de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on regarde l'accroissement de x et y comme nuls, ce qui réduit leur rapport à l'expression vague de $\frac{0}{0}$; on peut cependant se convaincre que ce rapport n'est pas absurde : soit pour cela la proportion

$$x : y :: qx : qy,$$

d'où on déduit généralement

$$x - qx : y - qy :: x : y.$$

Si le quotient du conséquent, divisé par l'antécédent $q = 1$, cette dernière proportion donnera

$$\frac{0}{0} = \frac{y}{x};$$

ainsi le rapport de $\frac{0}{0}$ est, en général, vague et indéterminé : dans le problème des tangentes, on ne se borne pas à regarder les accroissemens comme nuls, mais comme dernières raisons des quantités finies dont ils sont les limites.

Pour s'en convaincre, prenons la ligne droite AM rapportée aux deux axes AX, AY : soit

Fig. 55.

$AP = x$, $PM = y$, $MR = \Delta x$, $M'R = \Delta y$: le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PM}{PS}$; en sorte que si on fait ce dernier $= a$, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a :$$

si au lieu de considérer l'ordonnée $P'M'$, on prend $p\,m$, on aura toujours

$$\frac{rm}{Mr}$$

$$\frac{rm}{Mr} = a :$$

si on diminue par la pensée, Mr, mr diminuera proportionnellement, et l'on aura toujours le rapport des accroissemens $= a$. Puisque Δy et Δx en diminuant continuellement conservent toujours le même rapport, il s'ensuit que ce rapport aura lieu même à la limite ; mais zéro est le terme dont ces quantités approchent dans leur décroissement ; donc dans la ligne droite MS, on a

$$\frac{0}{0} = a.$$

Si la ligne AMM' est courbe, le rapport $\frac{RM'}{RM}$ Fig. 54. n'est pas le même que celui de $\frac{r'm'}{r'M}$, comme dans la ligne droite ; mais si Mr' diminue, $m'r'$ diminuera aussi dans un rapport déterminé par la loi de la continuité et la nature de la courbe : donc $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est l'expression d'un rapport variable. La limite ou la raison dernière du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égale à $\frac{PM}{PT}$, et cette limite a lieu lorsque Δy et $\Delta x = 0$; mais comme ces quantités conservent toujours dans leurs décroissemens correspondans un rapport déterminé par l'équation de la courbe, il s'ensuit que lorsqu'ils sont devenus zéro, ils sont liés entre eux par la même équation ; ainsi quoique zéro soit la limite de toute grandeur variable qui va en diminuant, le rapport de $\Delta y : \Delta x$, employé dans le problème des tangentes, n'y entre pas d'une manière arbitraire ; mais il est déterminé par le rapport qui existe entre l'ordonnée et l'abscisse : aussi

au lieu de désigner la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ par l'expression vague $\frac{0}{0}$, on écrit $\frac{dy}{dx}$, pour avertir que de tous les rapports que $\frac{0}{0}$ peut exprimer, on ne considère que celui qui est égal à l'ordonnée divisée par la soutangente.

Pour se convaincre par un exemple particulier que lorsque Δy et Δx sont zéro, ils conservent entr'eux une certaine relation, nous prendrons les deux progressions géométriques suivantes :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n},$$

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots, \frac{1}{10^n}.$$

La limite de la première est zéro ; la limite de la seconde est encore zéro ; mais chaque zéro porte pour ainsi dire l'empreinte de la loi que suivent les termes de la progression dont il dérive : en sorte que si on divise chaque terme de la progression supérieure par son correspondant dans la progression inférieure, on aura

$$\frac{1}{2^n} : \frac{1}{10^n} = 5^n,$$

et à la limite,

$$\frac{0}{0} = 5^\infty = \infty.$$

296. Plusieurs Géomètres ont regardé les quantités représentées par dy, dx, comme évanouissantes ; c'est-à-dire qu'ils ont considéré les accroissemens respectifs des abscisses et des ordonnées

non avant qu'ils évanouissent, non après qu'ils sont évanouis, mais à l'instant qu'ils s'évanouissent; ils ont défini le calcul différentiel avec Euler, la méthode pour trouver ce que deviennent les rapports entre les différences finies des quantités variables, lorsqu'on suppose que ces différences deviennent nulles: cette définition est exacte, mais on n'en conçoit pas mieux la nature de ces quantités évanouissantes, auxquelles on assigne en quelque sorte une place entre l'existence et le néant.

Newton, pour éviter la supposition des infiniment petits, a considéré les quantités mathématiques comme engendrées par le mouvement d'un point. Il a appelé *fluantes* les quantités qu'on nomme *variables;* mais il les réduit à être véritablement zéro, parce qu'il les considère, non comme des espaces parcourus réellement, mais comme le rapport des vîtesses avec lesquelles les grandeurs varient: cette méthode s'accorde quant au fond avec le calcul différentiel, mais elle tient à la considération du mouvement qui est étrangère à l'analyse et à la géométrie. D'ailleurs la détermination analytique des vîtesses dépend dans la méthode des fluxions de la considération des quantités infiniment petites ou évanouissantes, et est par conséquent sujette aux mêmes difficultés que le calcul différentiel et la méthode des limites.

On va voir dans l'article suivant que toutes les différentes méthodes dont nous venons de parler n'ont d'autre but que de donner le moyen d'obtenir, séparément, les premiers termes du développement en série d'une fonction, et que par conséquent le calcul différentiel, la méthode des limites, celle des fluxions.., &c. sont les mêmes, quant au fond, que la théorie des fonctions analytiques.

Théorie des fonctions analytiques.

297. Soit l'équation d'une courbe $y = F\,x$, représentons par $y', y'', y'''\ldots$ les ordonnées correspondantes aux abscisses $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, $x+3\Delta x\ldots$ on aura

$$y', \text{ ou } y+\Delta y = F(x+\Delta x) = F.x+\Delta x\,F'.x$$
$$+\frac{\Delta x^2}{2}F''.x+\frac{\Delta x^3}{2.3}F'''.x\ldots$$

d'où on déduit

$$\Delta y = \Delta x\,F'.x+\frac{\Delta x^2}{2}F''.x+\frac{\Delta x^3}{2.3}F'''.x+\ldots \text{ \&c.}$$

Il a été démontré (91), qu'on pouvoit toujours donner à Δx une valeur assez petite pour que le premier terme de la série soit plus grand que tous les autres ensemble ; toute valeur de Δx plus petite que celle-là, satisfera encore à la même condition, et comme on peut prendre Δx moindre que toute grandeur assignable, on pourra rendre le premier terme de la série plus grand que la somme de tous les autres. Si l'on ne conserve que le premier terme, on aura l'équation

$$\Delta y = \Delta x\,F'.x;$$

mais parce que ce premier terme n'est qu'une partie de la différence, on le désigne par le diminutif *différentielle ;* et pour lui donner une caractéristique analogue à sa dénomination, on substitue au signe Δ, le signe d, pour exprimer cette différentielle ; en sorte que $dy = dx\,F'.x$ sera l'expression analytique de la différentielle de y.

On déduit de cette dernière expression

$$\frac{dy}{dx} = F'.x;$$

ce dernier résultat offre une nouvelle manière d'exprimer la fonction dérivée $F'x$, en divisant la différentielle de la fonction proposée par l'accroissement correspondant de la variable x; et il est aisé de se convaincre que ces deux expressions sont identiques. En effet pour avoir la valeur de $F'x$, la théorie des fonctions analytiques prescrit de substituer $x + \Delta x$ à la place de x dans $F.x$, et de développer la fonction jusqu'au second terme; le coefficient de Δx sera la valeur de $F'x$... Pour avoir la valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans la même fonction, le calcul différentiel prescrit de mettre $x + dx$ à la place de x, développer ensuite jusqu'au second terme; le coefficient de dx sera la valeur de $\frac{dy}{dx}$: on aura donc nécessairement

$$\frac{dy}{dx} = F'x.$$

Exemple : Soit

$$y = x^n = Fx.$$

La théorie des fonctions analytiques donne

$$F'x = nx^{n-1};$$

le calcul différentiel donne

$$dy = nx^{n-1}dx,$$

d'où on déduit

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1};$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = F'x.$$

Voyons comment on peut exprimer les autres fonctions dérivées $F'x$; $F''.x$... &c.

298. On a vu (249), que $\Delta^2 y = y'' - 2y' + y$: si on met à la place de y'', y', y leurs valeurs en fonctions de x et Δx, on aura

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2 y &= F(x+2\Delta x) - 2F(x+\Delta x) + F(x)\\ &= Fx + 2\Delta x F'x + \frac{4\Delta x^2}{2} F''x + \ldots \text{ \&c.}\\ &\quad -2Fx - 2\Delta x F'x - \frac{2\Delta x^2}{2} F''x - \ldots \text{ \&c.}\\ &\quad + Fx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}$$

$$= \overline{\Delta x^2} F''.x + \ldots \text{ \&c.}$$

Le premier terme de ce développement sera donc

$$\overline{\Delta x^2} F'' x :$$

si on prend Δx, assez petit pour que ce premier terme soit incomparablement plus grand que la somme de tous les autres, et qu'on change Δ en d, on aura

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F''.x ;$$

et l'on se convaincra facilement que la valeur de $F''.x$ donnée par la théorie des fonctions analytiques est identique avec la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ donnée par le calcul différentiel.

On a aussi

$$\Delta^3 y = y''' - 3y'' + 3y' - y ,$$

ou en substituant,

$$\left.\begin{aligned}\Delta^3 y = F(x+3\Delta x) - 3F(x+2\Delta x) + 3F(x+\Delta x) - F.x \\ = Fx + 3\Delta x F'.x + \frac{9\overline{\Delta x}^2}{2} F''.x + \frac{27\Delta x^3}{2.3} F'''.x \\ - 3F.x - 6\Delta x F'x - \frac{12\overline{\Delta x}^2}{2} F''.x - \frac{24\Delta x^3}{2.3} F'''.x \\ + 3Fx + 3\Delta x F'x + \frac{3\Delta x^2}{2} F''.x + \frac{3\Delta x^3}{2.3} F'''.x \\ - Fx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}$$

$$= \overline{\Delta x}^3 F'''.x + \ldots \&c.$$

Le premier terme de ce développement est

$$\Delta x^3 F'''.x :$$

si on ne prend que le premier terme, et qu'on change Δ en d, on aura

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = F'''.x.$$

On trouvera par un calcul semblable que $F^{IV} x$ pourra être représenté par $\frac{d^4 y}{dx^4}$, et ainsi des autres fonctions dérivées, et que la valeur des termes différentiels $\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}$..... &c. est la même que celle des fonctions dérivées $F'''.x$, $F^{IV} x$... &c.

299. On a vu (89) que si dans l'équation $y = Fx$ on met $x+k$ à la place de x, on a la formule du développement

$$Y = Fx + kF'.x + \frac{k^2}{2} F''.x + \frac{k^3}{2.3} F'''.x + \ldots \&c.$$

et on vient de voir que $F'.x = \frac{dy}{dx} \ldots F''.x = \frac{d^2 y}{dx^2} \ldots$

$F'''x = \frac{d^3y}{dx^3}$: on aura donc

$$Y = y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots \text{ \&c. (294)}$$

Ainsi la formule donnée par la théorie des fonctions analytiques pour le développement des fonctions en série est absolument la même que le théorême de Taylor.

Les termes $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots$ sont appelés coefficiens différentiels, et l'on voit qu'ils sont les mêmes que les termes qu'on nomme dans les fonctions dérivées, fonctions primes, fonctions secondes, &c.

On peut donc dire que l'objet du calcul différentiel est de donner les moyens abrégés de trouver dans tous les cas les valeurs de ces fonctions dérivées, et d'exprimer par des caractères particuliers la loi suivant laquelle elles dépendent de la variable y, considérée comme fonction de x; en sorte que cette loi puisse entrer dans les équations indépendamment de la connoissance de la forme de la fonction de x représentée par y.

Les fonctions dérivées $F'.x$, $F''.x\ldots$ sont absolument indépendantes des accroissemens de x; donc les coefficiens différentiels n'en dépendront pas davantage : ainsi pour déterminer ces coefficiens, on pourra substituer $x+dx$ à la place de x dans Fx, pourvu qu'on ne regarde pas dx comme une quantité déterminée, mais seulement comme un signe abstrait destiné à retracer la marche qu'on a suivie pour arriver à l'expression $F'.x$. Revenons à la formule générale du développement.

300. Lorsque la courbe représentée par l'équa-
Fig. 57. tion $y=Fx$ a plusieurs branches telles que MmM', MnM'; c'est-à-dire lorsqu'à une même abscisse

répondent plusieurs ordonnées, chaque valeur de y donne une valeur différente pour les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$... &c. et on a autant de séries pour le développement de $F(x+k)$ que la courbe a de branches différentes ; mais si en donnant à l'abscisse une valeur particulière a, le nombre des ordonnées répondantes à cette abscisse diminue, plusieurs branches de la courbe passeront par un même point ; mais le nombre des séries du développement de $F(x+k)$ ne diminuera pas, parce qu'à la distance $a+k$ de l'origine des abscisses la courbe conservera toutes ses branches.

Lorsque le nombre des ordonnées diminue pour une valeur particulière de x, le nombre des valeurs particulières des coefficiens différentiels diminue aussi, et par conséquent la série du développement ne pourra pas convenir à toutes les branches de la courbe répondant à l'abscisse $a+k$; et n'y ayant aucune raison déduite de la nature du calcul pour qu'elle convienne à une branche plutôt qu'à une autre, les coefficiens différentiels doivent rester indéterminés, c'est-à-dire $\frac{0}{0}$, ou infinis ; et la formule du développement se trouvera en défaut pour ces cas particuliers.

Cela ne peut arriver que lorsque des valeurs particulières de x font disparoître des radicaux dans Fx, qui subsistent néanmoins dans $F(x+k)$: or un radical ne peut disparoître dans une équation que parce que la quantité qui le multiplie devient nulle, ou parce que le radical lui-même devient nul. Soit par exemple l'équation

$$y = b \pm (x-a)\sqrt{\frac{x}{b}} :$$

il est visible, 1°. que si $x = a$, le radical disparoît à cause du coefficient $x - a$ qui le multiplie et qui devient nul; 2°. si l'on fait $x = 0$, le radical disparoît encore, parce qu'il est lui-même égal à zéro.

Dans le premier cas il est clair que le radical disparoissant dans la valeur de y, il peut ne pas disparoître dans les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$... &c. comme cela arrive effectivement dans l'exemple cité; alors le développement de $F(x+k)$ donnera toujours deux séries, une pour la branche MmM', l'autre pour la branche MnM'; mais si par l'élévation au quarré on fait disparoître le radical dans l'équation citée, on aura

$$(y-a)^2 \times a = (x-a)^2 \times x.$$

Les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$... déduits de cette équation ne montant qu'au premier degré, ne peuvent avoir qu'une valeur, et comme il n'y a pas de raison pour qu'ils donnent la valeur qui convient à la branche MmM' plutôt que celle qui convient à la branche MnM', ils doivent se présenter sous une forme indéterminée dans la supposition de $x = a$; c'est-à-dire qu'ils seront sous la forme $\frac{0}{0}$.

Dans le second cas, si on fait disparoître le radical par la supposition de $x = 0$, alors le même radical disparoît dans tous les coefficiens différentiels; et comme ce radical se trouve au dénominateur, ils deviennent tous égaux à l'infini.

Ces deux cas qui semblent faire exception à la règle générale, ont été discutés par Lagrange dans

sa Théorie des fonctions analytiques, nos 34 et suivans : il résulte de ses observations que le développement de $F(x+k)$ dans ce dernier cas doit contenir des puissances fractionnaires de k, ce que la formule générale n'exprime pas. (*Voyez* l'ouvrage cité de Lagrange et le Calcul Intégral de Lacroix.)

301. Soit l'équation à trois variables $z=F(x,y)$: on a vu (97) que lorsque x devient $x+k$ et $y, y+o$, on a

$$Z, \text{ ou } F(x+k, y+o) = z+k\left(\frac{Z'}{x}\right)$$

$$+o\left(\frac{Z'}{y}\right)+\frac{k^2}{2}\left(\frac{Z''}{x^2}\right)+ko\left(\frac{Z''}{xy}\right)+o^2\left(\frac{Z''}{y^2}\right)\ldots.$$

$\left(\frac{Z'}{x}\right)$ représente la fonction prime de z, prise en ne faisant varier que x, et $\left(\frac{Z'}{y}\right)$ désigne la fonction prime de z, en ne faisant varier que x; mais si on différentie l'équation en ne faisant varier que x, on aura

$$\frac{dz}{dx}=\left(\frac{Z'}{x}\right),$$

et en faisant varier y,

$$\frac{dz}{dy}=\left(\frac{Z'}{y}\right):$$

on pourra donc substituer ces deux coefficiens différentiels aux notations

$$\left(\frac{Z'}{x}\right)=\left(\frac{Z'}{y}\right)\ldots$$

Cependant comme $\frac{dz}{dx}$ ne marque qu'une partie de

la différentielle de z; c'est-à-dire z différentiée seulement par rapport à la variable x; pour ne pas s'y tromper, on écrit

$$\left(\frac{dz}{dx}\right):$$

par la même raison on écrira $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ pour désigner le coefficient différentiel de dy. La différentielle totale de z sera composée de deux termes (275), et l'on aura généralement

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy.$$

Si on différentie de nouveau l'équation

$$\frac{dz}{dx} = F'(x,y),$$

en ne faisant varier qu'une variable, et qu'on représente par u le coefficient différentiel $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, on aura

$$u = F'(x,y), \text{ et } \left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{Z''}{x^2}\right) \ldots \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{Z''}{xy};$$

mais $$u = \left(\frac{dz}{dx}\right);$$

donc

$$\underline{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)} = \frac{Z''}{x^2}, \text{ et } \underline{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)} = \left(\frac{Z''}{xy}\right).$$
$$dx \qquad\qquad dy$$

La différentielle de $\underline{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)}$ ne devant être prise
$$dx$$

que par rapport à x, on pourra écrire

$$\frac{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right);$$

on écrira aussi par la même raison,

$$\frac{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right):$$

donc les fonctions dérivées du second ordre $F''(x,y)$, $F''_{,}(x,y)$, $F''_{,}(x,y)$, qu'on a représentée (97) par $\left(\frac{z''}{x^2}\right)$, $\left(\frac{z''}{y^2}\right)$, $\left(\frac{z''}{xy}\right)$ seront égales aux coefficiens différentiels

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right), \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right);$$

et la formule de développement pour une fonction de deux variables sera

$$Z = z + k\left(\frac{dz}{dx}\right) + o\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$
$$+ k\,o\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + \frac{o^2}{2}\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + \ldots.$$

Ainsi le Calcul Différentiel fournira encore le moyen de déterminer d'une manière abrégée les fonctions dérivées de tous les ordres, lorsque la fonction primitive est composée de deux variables, et tout ce qui a été démontré dans la théorie des fonctions analytiques trouvera son application dans le Calcul Différentiel; on conclura, par exemple, du n°. (95), que si on a une équation entre deux variables représentée par

$$F(x,y) = o,$$

ou plus simplement, par

$$V=0;$$

en la différentiant plusieurs fois, on en déduira plusieurs équations différentielles qui auront lieu en même temps que la proposée; c'est-à-dire que si on a $V=0$, on aura aussi

$$dV=0\ldots d^2V=0\ldots d^3V=0\ldots \&c.$$

Manière de représenter graphiquement les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots.$

302. Soit une courbe MM', dont l'équation est

$$y=Fx;$$

AP étant l'abscisse, et PM l'ordonnée: si on
Fig. 56. fait $PP'=k$, et $P'M'=y'$, on aura

$$y'=y+k\frac{dy}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots.$$

Par le point M menons la ligne droite TMS, tangente à la courbe en M; l'équation de cette ligne droite est généralement

$$z=au+b;$$

l'on aura par conséquent au point P',

$$z' \text{ ou } P'S=z+k\frac{dz}{du}=z+ak;$$

mais la condition que TMS est tangente au point M donne

$$a=\frac{dy}{dx}\ (181):$$

on a donc

$$rs = k\frac{dy}{dx}.$$

Le point M étant un point déterminé de la courbe, les coefficiens différentiels sont aussi déterminés par ce point : faisant donc

$$y = A, \frac{dy}{dx} = B, \frac{d^2y}{dx^2} = C, \frac{d^3y}{dx^3} = D \ldots \&c.$$

L'ordonnée $P'M'$ sera représentée par la série

$$y = A + Bk + \frac{C}{2}k^2 + \frac{Dk^3}{2.3} + \ldots \&c.$$

Si on trace entre la tangente et la courbe MM', les courbes paraboliques Mt, Mu, dont les équations rapportées aux mêmes axes et à la même origine sont, pour la première,

$$z = A + B(u-x) + \frac{C}{2}(u-x)^2 \ldots\ldots (1)$$

pour la seconde,

$$z = A + B(u-x) + \frac{C}{2}(u-x)^2 + \frac{D}{2.3}(u-x)^3 \ldots (2)$$

et qu'on suppose ensuite que l'abscisse u devienne $x+k$, ou AP', les ordonnées correspondantes seront $P't$, $P'u$,

et l'on aura

$$P't = A + Bk + \frac{C}{2}k^2 \ldots P'u = A + Bk + \frac{C}{2}k^2 + \frac{D}{2.3}k^3;$$

mais on a

$$P'r, \text{ ou } PM = A, rs = Bk,$$

donc

$$st = \frac{C}{2}k^2, \text{ et } tu = \frac{D}{2.3}k^3 \ldots \&c.$$

On voit donc que le premier terme du développement est égal à l'ordonnée de la courbe au point donné M; le second est égal à la partie de l'ordonnée comprise entre la perpendiculaire Mr et la tangente; le troisième est égal à la partie de l'ordonnée comprise entre la tangente et la première courbe parabolique; le quatrième est égal à la partie de la même ordonnée comprise entre la première courbe parabolique et la seconde... et ainsi des autres.

Application des méthodes précédentes à la Géométrie.

303. Le premier problême de Géométrie qu'on ait résolu par les nouveaux calculs est celui des tangentes; on en a vu la solution par le calcul différentiel, par la méthode des limites et par la théorie des fonctions analytiques : l'identité démontrée entre la valeur du coefficient différentiel et la fonction prime $F'.x$, fait qu'on peut substituer la première de ces expressions à la seconde dans la formule des soutangentes $\frac{y}{F'.x}$, donnée par la théorie des fonctions analytiques : elle devient ainsi $y\frac{dx}{dy}$, comme on l'a obtenue par le calcul différentiel et par la méthode des limites.

Puisque l'on a $\frac{dy}{dx} = F'.x$, et que les règles de différentiation données par Leïbnitz sont extrêmement simples, commodes et faciles à retenir, on s'en servira pour trouver la valeur des fonctions dérivées; et le calcul différentiel sera ainsi réduit à une méthode en quelque sorte mécanique pour trouver

trouver promptement ces fonctions. Nous ne ferons pas ici de nouvelles applications de la formule des soutangentes à des courbes particulières ; mais comme ce problème est un cas particulier de la théorie générale des osculations, nous donnerons plus de développement à ce qui a été dit de cette théorie (180, 188).

Des différens ordres d'osculation des lignes courbes.

304. Soit une courbe quelconque $'MM'$, dont les abscisses AP sont représentées par x, et les ordonnées PM par y ; menons par le point M la tangente MS : quoiqu'on ne puisse pas mener une autre ligne droite entre la tangente et la courbe, on peut néanmoins faire passer une infinité d'autres courbes différentes qui toucheront la courbe proposée au point M, et auront pour tangente commune la ligne MS. Le cercle offre un exemple très-simple de cette circonstance : on sait, par les Elémens de Géométrie, qu'entre un cercle et sa tangente on peut faire passer une infinité de circonférences différentes, ayant toutes leur centre sur la même ligne droite perpendiculaire à la tangente, et un rayon pris sur cette perpendiculaire plus grand que celui du cercle. Fig. 58.

Soit donc une seconde courbe $M\mu$ passant entre la proposée et la tangente ; représentons l'équation de la proposée par

$$y = F.x ;$$

celle de la seconde courbe par

$$u = F.x.$$

Menons RR' parallèle à l'axe, et les ordonnées

équidistantes $P'M$, $P''M$, $P'''M''$, séparées par l'intervalle $'PP$, $PP'=k$: soit

$$PM=y,\ AP=x,\ P'M'=y',\ P'\mu=u';$$

on aura les deux équations suivantes :

$$y'=y+k\frac{dy}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots\text{\&c}\ldots(1)$$

$$u'=u+k\frac{du}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3u}{dx^3}+\ldots\text{\&c}\ldots(2)$$

Faisant ensuite k négatif, on aura

$$'y=y-k\frac{dy}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots\text{\&c}\ldots(3)$$

$$'u=u-k\frac{du}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3u}{dx^3}+\ldots\text{\&c}\ldots(4)$$

Si on retranche l'équation (2) de l'équation (1), on a

$$M'\mu'=k\left\{\frac{dy}{dx}-\frac{du}{dx}\right\}+\frac{k^2}{2}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2u}{dx^2}\right\}+\frac{k^3}{2.3}\left\{\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3u}{dx^3}\right\}+\ldots\text{\&c.}$$

Retranchant l'équation (4) de l'équation (3), on a

$$'M'\mu=k\left\{\frac{du}{dx}-\frac{dy}{dx}\right\}+\frac{k^2}{2}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2u}{dx^2}\right\}+\frac{k^3}{2.3}\left\{\frac{d^3u}{dx^3}-\frac{d^3y}{dx^3}\right\}+\ldots$$

Les rapports entre les différens termes qui se correspondent dans les valeurs de y', u' servent à faire connoître jusqu'à quel point les deux courbes MM', $M\mu$ diffèrent l'une de l'autre dans la partie de leur tracé correspondante à $PP'=k$.

On voit 1°, que pour que ces deux courbes ayent un point commun répondant à l'abscisse x, il faut qu'à ce point $u = y$; ce qui donne

$$F.x = f.x :$$

en vertu de cette supposition les deux courbes passent par le point M, pouvant d'ailleurs avoir un tracé quelconque de part et d'autre de ce point: il y a dans ce cas une simple intersection.

On voit 2°. que puisque la quantité k peut être prise assez petite pour que le premier terme soit plus grand que la somme de tous les autres, la distance des deux courbes $\mu' M'$ sera d'autant plus petite qu'il y aura plus de termes qui disparoîtront au commencement de l'expression de $\mu' M'$... Ainsi le rapprochement deviendra plus grand si l'on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} :$$

il sera encore plus grand si l'on a de plus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} .$$

$\frac{dy}{dx}$ est l'expression de la tangente de l'angle que la tangente de la courbe $M M'$ au point M fait avec l'axe des abscisses, et $\frac{du}{dx}$ est la tangente de l'angle que la tangente de la courbe $\mu M \mu'$ au point M fait avec le même axe des abscisses : donc lorsque $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$, c'est-à-dire lorsque le premier terme de la valeur de $\mu' M'$ manquera, les deux courbes non-seulement auront le point M de commun, mais encore auront la tangente commune à

ce même point : donc les deux courbes seront tangentes l'une à l'autre au point M, c'est ce qu'on nomme *osculation du premier ordre*.

305. De plus, toute autre courbe dont l'équation seroit $z = \varphi.x$, qui, passant par le point M ne jouiroit pas de la propriété d'avoir $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$, ne pourroit pas passer entre la courbe MM, et la courbe $M\mu$. En effet, soit D la différence des ordonnées des deux premières courbes pour la même abscisse $x+k$... on aura

$$D, \text{ ou } F(x+k) - f(x+k) = \frac{k^2}{2}\left\{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y}{du^2}\right\} + \text{...\&c.}$$

Soit Δ la différence des ordonnées de la première courbe et de la troisième, on aura

$$\Delta, \text{ ou } F(x+k) - \varphi.(x+k) = k\left\{\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}\right\} + \frac{k^2}{2}\left\{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\right\} + \text{...\&c.}$$

Or, tant que k ne sera pas zéro, on peut lui donner une valeur assez petite pour que la quantité Δ soit plus grande que la quantité D, abstraction faite du signe : car le premier terme de la valeur de Δ peut être plus grand que tous les autres ensemble : donc la troisième courbe ne pourra, dans ce cas, passer entre les deux premières.

306. Supposons que l'on ait à-la-fois

$$y = u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}, \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2};$$

cette troisième condition, jointe aux deux premières, indique que parmi toutes les courbes dont l'équation seroit

$$z = \varphi.x,$$

et qui seroient tangentes à MM', aucune ne peut avoir son cours entre MM' et $M\mu$; c'est-à-dire que de toutes les courbes tangentes à MM', celle qui jouit de la troisième propriété s'approche le plus de la courbe MM', et il y a pour lors en M entre les deux courbes une *osculation du second ordre*.

Sans pousser plus loin le détail sur les différens ordres d'osculations, nous remarquerons que la contingence ou osculation a lieu entre deux courbes lorsque dans les séries de développement qui donnent les valeurs de leurs ordonnées répondantes à une même abscisse, elles ont plus d'un terme de commun, et elle est toujours d'un ordre égal au nombre des termes communs moins un. Nous avons déjà appliqué la théorie de l'osculation à la solution du problême des tangentes (180): appliquons-la à présent à la recherche du rayon de courbure.

307. Supposons pour cela que la courbe osculatrice soit un cercle dont l'équation rapportée aux mêmes axes que la courbe soit

$$(q-u)^2+(p-x)^2=R^2 \text{ (189)},$$

ou $$u=q\pm\sqrt{R^2-(p-x)^2}\ldots\ldots\ldots(1)$$ Fig. 27.

Pour que la courbe et le cercle aient un point de commun M, il faut qu'à ce point $u=y$.

Pour que la courbe et le cercle aient une tangente commune au point M, c'est-à-dire pour qu'il y ait osculation du premier ordre, il faut que $\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}$: or $\frac{du}{dx}=\frac{p-x}{y-q}$; donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p-x}{y-q}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Cette équation, combinée avec la première,

$$y=q\pm\sqrt{R^2-(p-x)^2},$$

suffira pour éliminer les deux indéterminées p, q; et comme ces deux indéterminées sont les ordonnées du centre O, par rapport aux deux axes AP, AB, l'équation résultante sera celle de tous les cercles tangens, qui auront leur centre sur la normale MR.

Enfin si on veut une osculation du second ordre aux deux équations précédentes, il faudra joindre la troisième

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2};$$

et comme $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{y-q}$ on aura l'équation

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y-q} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Cette dernière donne

$$y-q = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Si l'on substitue cette valeur de $y-q$ dans l'équation (2), on aura

$$p-x = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\frac{dy}{dx}}{-\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ou

$$p = x - \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Les valeurs de $p-x$, $q-y$, étant substituées dans l'équation (1), on aura

$$R=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots (190)$$

Le cercle construit d'après ces valeurs est, par conséquent, de tous ceux qui ont leur centre sur la normale MR, celui qui s'écarte le moins de la courbe, et on ne pourroit pas faire passer d'autre cercle entre la trace de la courbe et la sienne ; c'est ce cercle qui mesure la courbure de la courbe au point M, et qu'on nomme *cercle osculateur* : son rayon R est appelé rayon de courbure (188).

Il suit de la théorie précédente que l'expression du rayon de courbure est indépendante de la valeur de p et q, et doit être donnée en fonction de x et y; il faut donc éliminer de l'équation du cercle osculateur p et q, ce qui exige deux nouvelles équations.

308. Si dans l'équation du cercle osculateur on met y à la place de u, l'équation du cercle sera une fonction de y, x, p, q, R, qu'on pourra représenter généralement par

$$F(x,y,p,q,R)=0;$$

mais il est démontré que si cette équation a lieu, sa différentielle première et sa différentielle seconde ont lieu en même temps (95 et 301) : on aura donc

$$d.F(x,y,p,q,R)=0, \quad d^2.F(x,y,p,q,R)=0:$$

ces deux équations différentielles suffiront pour

éliminer p et q dans l'équation

$$F(x, y, p, q, R) = 0,$$

et par conséquent pour donner R en fonction de x et y.

Ainsi l'équation du cercle osculateur étant

$$(y-q)^2+(x-p)^2=R^2,$$

on aura les deux autres

$$(y-q)\frac{dy}{dx}+x-p=0\ldots\ldots$$

$$(y-q)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0\ldots$$

celle-ci donne

$$y-q=-\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

on tire de la précédente

$$x-p=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Ces valeurs de $y-q$, $x-p$, substituées dans l'équation du cercle osculateur, donnent

$$R=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

comme on l'a déjà trouvé (190).

On a vu que la formule générale de la normale est

$$N = y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\ (289),$$

on aura donc

$$\frac{N^3}{y^3} = \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}};$$

cette valeur substituée dans l'expression générale du rayon de courbure, donnera

$$R = \frac{N^3}{y^3\,\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

L'équation générale des sections coniques rapportée à l'axe est

$$y = \sqrt{px \pm \frac{px^2}{2a}}.$$

Cette équation différentiée deux fois, donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^3}\ (93);$$

on aura donc pour toutes les sections coniques,

$$R = \frac{N^3}{\frac{1}{4}p^2}.$$

Dans la cyloïde,

$$y = u + a.\sin\frac{u}{a}\ (203),$$

Fig. 59.

en la différentiant, on a

$$dy = du + du\cos\frac{u}{a};$$

soit l'abscisse $AP = x$, l'ordonnée $PM = y$,

on aura $LP = \sqrt{2ax - x^2}$,

$2a$ étant le diamètre du cercle générateur, c'est-à-dire AO : la différentielle de l'arc $AL = u$ est égale à la différentielle du sinus, divisée par le cosinus (286) ; donc

$$du = \frac{a(a-x)dx}{\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

et $$du \cos\frac{u}{a} = \frac{a-x.dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

on aura donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}.$$

En différentiant une seconde fois, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{x+2a-x}{x^2\sqrt{\frac{2a-x}{x}}}\right\} = \frac{-a}{x\sqrt{2ax-x^2}};$$

substituant ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, dans l'expression générale du rayon de courbure, et réduisant, on a

$$R = \frac{\left\{1+\frac{2a-x}{x}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{a}{x\sqrt{2ax-x^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{8a}{x^3}} \times x\sqrt{2ax-x^2} = 2\sqrt{2a} \times \sqrt{2a-x}.$$

La corde LO est moyenne proportionnelle entre

le diamètre du cercle générateur AO et le segment adjacent PO; on a donc

$$LO = \sqrt{2a.(2a-x)},$$

et par conséquent le rayon de courbure $MR = 2LO$, c'est-à-dire que pour un point quelconque de la cycloïde, le rayon de courbure est double de la corde correspondante du cercle générateur.

Théorie des développées.

309. Ce qui a été dit sur le rayon de courbure (307) et sur la position des centres de tous les cercles osculateurs aux différens points de la courbe, peut servir à faire connoître la formation des courbes par développement.

Concevons, en effet, que d'un point quelconque a, et d'un rayon aA, on décrit un très-petit arc de cercle AM; que l'on prolonge le rayon extrême aM de la quantité ab, et qu'avec ce nouveau rayon on décrive un nouvel arc MN; que l'on prolonge le rayon extrême bN de la quantité bc, et qu'avec ce nouveau rayon, on décrive un troisième arc PN, et ainsi de suite, on formera une série d'arcs de cercle qui se toucheront par leurs extrémités, et dont les centres a, b, c... &c. seront les angles du polygone, qui aura pour côtés les lignes ab, bc... &c. qui seront les différences des rayons aM, bN, &c. Fig. 60.

On peut concevoir ce polygone enveloppé d'un fil, tel que sa partie extrême soit dirigée suivant le premier côté du polygone, et s'étende au-delà de ce côté, d'une quantité déterminée aM: en développant le fil de dessus le polygone, il décrira la suite des arcs que nous venons de considérer.

Plus les arcs décrits seront petits, plus leur somme $AMNP$ approchera d'une courbe continue, dont ils seront les arcs osculateurs, et plus le polygone $k'abc$ approchera de la courbe formée par les centres de circonférences osculatrices. Les deux courbes sont donc les limites des suites des arcs AM, MN, NP, et des côtés $k'a$, ab, bc... : et tout ce qui a constamment lieu dans ces suites, a lieu également pour ces courbes (Géom. 8. VIII) : ainsi l'on peut concevoir une courbe comme formée par le développement d'un fil, qui enveloppe la courbe formée par les centres de ces cercles osculateurs : on nomme cette dernière courbe *développée* : la première est appelée *développante* : on voit par-là, qu'un arc de la développée est égal à la différence des deux rayons de courbure de la développante, correspondans aux deux extrémités de cet arc.

310. Puisque les lignes GQ, AQ, que nous avons désignées par p, q, (189) déterminent la position des centres a, b, c, d... et que la somme infinie de ces centres forme la développée, il s'ensuit que ces mêmes lignes seront les coordonnées de la développée : on aura donc son équation, en prenant les valeurs de x, y, au moyen des expressions déjà trouvées de p, q, (307), et la substituant dans l'expression de la développante : l'équation en p, q qui en résultera, sera celle de la développée.

Exemple premier. Soit la développante AM, une parabole, dont l'équation est $y^2 = Bx$: on aura

Fig. 61.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2y}, \quad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{4y^2 + B^2}{4y^2} \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2y^2}{B} + \frac{dy}{dx} = -\frac{B^2}{4y^3};$$

substituant ces valeurs dans l'expression de p,q (307), on a

$$p-x=\frac{4y^2+B^2}{2B}\ldots y-q=\frac{4y^3}{B^2}-y:$$

ces deux expressions donnent

$$p=3x+\frac{B}{2}\ldots q=-\frac{4y^3}{B^2},$$

d'où on tire

$$y=-\left(\frac{B^2q}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\ldots x=\frac{2p-B}{6}:$$

substituant ces valeurs dans l'équation $y^2=Bx$, elle devient

$$\left(\frac{B^2q}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{B}{6}(2p-B):$$

si la ligne AC est le rayon de courbure au sommet de la parabole, on aura

$$AC=\frac{B}{2}:$$

et si l'on veut transporter l'origine des abscisses de A en e, il faudra faire

$$p-\frac{B}{2}=u, \text{ ou } 2p-B=2u:$$

l'équation de la développée deviendra

$$u^3=\frac{27}{16}Bq^2:$$

ce qui indique que la développée de la parabole ordinaire est la seconde parabole cubique, ayant

pour paramètre $\frac{27}{16}B$: cette parabole a deux branches, CR, CR', la première engendre par son développement la branche AM, de la développante, la seconde produit la branche AM'.

Exemple second. Soit la développante BM une ellipse, dont l'équation est

Fig. 62.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2);$$

l'origine des abscisses étant en B : pour déterminer l'équation de la développée AC, on a

$$1^\circ.\quad y + q = \left(y^2 + y^2\frac{dy^2}{dx^2}\right) \times \frac{a^2}{b^4}y \ldots$$

donc

$$1^\circ.\quad q = \frac{a^2 y}{b^4}\left\{y^2 + y^2\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{b^4}{a^2}\right\}$$

soit $a^2 - b^2 = c^2$, et l'on aura

$$q = \frac{y}{b^2}\left\{2ax - x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a-x)^2 - b^2\right\}$$

$$= \frac{c^2 y}{a^2 b^2}(2ax - x^2) = \frac{c^2}{a^3 b}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}};$$

soit fait pour abréger $\frac{a^2 q}{c^2} = t$, on aura

$$abt = (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$2^\circ.\qquad p - x = (y + q)\frac{dy}{dx}$$

$$= \left(\frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{c^2}{a^3 b}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}\right) \times \frac{ba - x}{a\sqrt{2ax - x^2}}$$

$$= \left\{\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^4}(2ax - x^2)\right\}(a - x);$$

d'où on déduit

$$p-\frac{b^2}{a}=\frac{c^2x}{a^2}+\frac{c^2x}{a^4}(2a^2x-3ax^2+x^3)$$

$$=\frac{c^2}{a^4}(\overline{x-a}^3+a^3)$$

Dans l'ellipse le rayon de courbure au sommet de la courbe $=\frac{b^2}{a}$: donc $AB=\frac{b^2}{a}$.

Représentons par p' la ligne PC, ou $QC-AB=p-\frac{b^2}{a}$ on aura

$$p'=\frac{c^2}{a^4}(\overline{x-a}^3+a^3):$$

soit encore $\frac{a^2p'}{c^2}=u$, on aura

$$a^2(u-a)=(x-a)^3 \ldots\ldots(2)$$

Si l'on élimine x au moyen des deux équations (1), (2) on aura pour l'équation de la développante de l'ellipse,

$$b^2t^2=a\left(a-\sqrt[3]{a(a-u)^2}\right)^3,$$

ou

$$a(a-u)^2=\left(a-\sqrt[3]{\frac{b^2t^2}{a}}\right)^3:$$

si on met à la place de u, t leurs valeurs, on aura pour équation finale,

$$(c^2-ap')^2=c\left(c-\sqrt[3]{\frac{b^2q^2}{c}}\right)^3:$$

l'origine des abscisses étant en A.

Fig. 59. *Exemple troisième.* Soit la développante MA un cycloïde, dont l'équation est

$$y = u + a \sin \frac{u}{a};$$

l'origine des abscisses étant en A : l'équation du cercle osculateur en M, sera

$$\overline{MR}^2 = MK^2 + RK^2;$$

ou

$$R^2 = (p + 2a - x)^2 + (q - \pi + y)^2;$$

π étant la base CO, ou la demi-circonférence du cercle générateur : on aura donc

$$p = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{da^2}\right)\frac{dy}{dx} - (2a - x)\ldots}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{q\left(1 + \frac{dy^2}{da^2}\right) + \pi - y}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Dans la cycloïde on a

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}} \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{x\sqrt{2ax - x^2}}$$

substituant ces valeurs dans l'expression de p et q, on a

1°. $q = 2\sqrt{2ax - x^2} + \pi - y$; $y = u + \sqrt{2ax - x^2}$; donc

$$q = \pi - u + \sqrt{2ax - x^2}.$$

2°.

2°. $p = 2a - x$,

donc $x = 2a - p$,

et $q = \pi - u + \sqrt{2ap - p^2} : \pi - u = \text{arc } LO$,

et $\sqrt{2ap - p^2} - a \sin \frac{LO}{a}$, ou $a \sin \frac{cs}{a}$:

donc $q - \text{arc} . cs + a \sin \frac{cs}{a}$;

et par conséquent la développée de la cycloïde est une autre cycloïde, mais renversée.

Cette proposition peut être démontrée d'une manière plus simple par la synthèse.

Des maxima et des minima dans les courbes.

311. Soit une fonction d'une ou plusieurs variables x, y, représentée par z, supposons que ces variables passent successivement par tous les degrés de grandeur; il pourra arriver que les différentes valeurs de z qui résultent des accroissemens des variables x, y, soient d'abord croissantes, et ensuite décroissantes, alors il y aura une de ces valeurs qui surpassera les autres : si, au contraire, les valeurs de z étoient d'abord décroissantes, et ensuite croissantes, il s'en trouvera une qui sera moindre que toutes les autres : le terme où l'accroissement de z s'arrête, s'appelle un *maximum*, et celui où elle cesse de décroître, un *minimum*. Les questions qui regardent les maxima et les minima consistent donc à trouver pour une fonction donnée d'une ou plusieurs variables, la valeur de ces variables qui rendent la fonction plus grande ou plus petite que celles qui la précèdent immédiatement, ou qui la suivent.

Fig. 2-16. Soit une courbe rentrante, par exemple, un cercle ou une ellipse, il est visible que toutes les ordonnées de ces deux courbes vont en augmentant continuellement, en partant d'une extrémité du diamètre; en sorte que l'ordonnée qui passe par le centre est plus grande que les ordonnées qui la précèdent ou qui la suivent immédiatement : elles seront donc des *maxima*.

313. Si la courbe est convexe vers l'axe, elle aura des ordonnées $p'm'$, $p'''m'''$... qui seront plus petites que celles qui la précèdent immédiatement et qui la suivent : elles seront donc des *minima*.

Fig. 70. n°. 4.

Quelle que soit la fonction d'une variable dont on demande le maximum ou le minimum, on pourra la représenter par l'ordonnée d'une courbe dont l'équation est

$$y = F.x :$$

soit a la valeur de l'abscisse AP, qui répond à la plus grande ordonnée PM ou à la plus petite; si on considère deux autres ordonnées $'P'M$, $P'M'$, répondant aux abscisses $a-k$, $a+k$, il faudra que dans le cas du maximum, l'ordonnée dont la valeur est $F.a$ soit toujours plus grande que les deux ordonnées $F(a-k)$, $F(a+k)$, qui la précèdent et qui la suivent, et qu'elle soit moindre dans le cas du minimum.

Conservons x à la place de a, on aura

$$'P'M, \text{ ou } F(x-k) = y - k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3x}{dx^3} + \ldots$$

$$PM, \text{ ou } Fx = y$$

$$P'M', \text{ ou } F(x+k) = y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

314. On a vu (91), qu'on peut toujours prendre

k assez petit pour que la valeur du terme $k\frac{dy}{dx}$ soit plus grande que la somme de tous les termes suivans; on pourra donc s'arrêter au second terme dans les développemens précédens, et écrire

$$'P'M = y - k\frac{dy}{dx} + \ldots \&c.$$
$$P\,M = y$$
$$P'M' = y + k\frac{dy}{dx} + \ldots \&c.$$

Si on compare entr'elles ces trois ordonnées, il est visible que $'P'M$ sera nécessairement moindre que PM, et $P'M'$ sera nécessairement plus grande que PM, à moins que l'on ait $\frac{dy}{dx} = 0$; si au contraire cette condition est remplie, on aura

$$'P'M = y \ldots + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$$
$$P\,M = y$$
$$P'M' = y \ldots + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$$

Si la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négative, les deux ordonnées $'P'M$, $P'M'$, seront moindres que PM; donc celle-ci jouira des conditions du maximum: si la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positive, les deux ordonnées $'P'M$, $P'M'$ seront plus grandes que PM; donc celle-ci jouira des conditions du maximum.

Il suit de ce qu'on vient de voir, que si on a l'équation d'une courbe dont une des ordonnées

est un maximum ou un minimum, on la déterminera en différentiant l'équation et en faisant $\frac{dy}{dx} = 0$: on aura ainsi une seconde équation qui, combinée avec l'équation de la courbe, fera connoître l'ordonnée qui est un maximum ou un minimum, supposé qu'il y en ait quelqu'une dans la courbe qui jouisse d'une de ces deux propriétés.

315. $\frac{dy}{dx}$ est l'expression de la tangente de l'angle que la tangente à un point de la courbe fait avec l'axe des abscisses; d'où il suit qu'aux points de la courbe où l'ordonnée est un maximum ou un minimum, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Il y a aussi maximum ou minimum d'abscisses rentrantes, aux points où la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses; par exemple, dans l'ellipse, aux points où la tangente est perpendiculaire sur le grand axe, répondent deux abscisses, l'une $= 0$, qui est un minimum, et l'autre $=$ le grand axe, qui est un maximum.

Puisque à ces points la tangente de la courbe est perpendiculaire à l'axe, on a

$$\frac{dy}{dx} = \text{infini}, \text{ ou } \frac{dx}{dy} = 0:$$

on dit ordinairement qu'aux points du maximum ou du minimum, $dy = 0$, ou ∞; mais cela doit s'entendre du rapport $\frac{dy}{dx}$.

316. Toutes les fois que l'ordonnée d'une courbe est un maximum ou un minimum, on doit avoir

$$\frac{dy}{dx} = 0;$$

mais l'inverse de cette proposition n'est pas généralement vraie; c'est-à-dire qu'il n'est pas généralement vrai de dire qu'il y ait maximum ou minimum d'ordonnée toutes les fois que l'on a

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

On verra (318) comment on peut s'assurer de l'existence du maximum ou du minimum lorsque $\frac{dy}{dx} = 0$.

Comme les courbes ne sont que la représentation ou le tableau de toutes les valeurs de la fonction de l'abscisse représentée par l'ordonnée, il est visible que la question de trouver la plus grande ou la plus petite valeur d'une fonction donnée d'une variable, revient à déterminer la plus grande ou la plus petite ordonnée de la courbe dont cette variable seroit l'abscisse; ainsi toutes les questions qui regardent le maxima ou le minima peuvent être considérées comme ayant pour objet de déterminer la plus grande ou la plus petite ordonnée d'une courbe dont on connoît l'équation: appliquons ces principes à quelques exemples.

317. *Problème premier.* Déterminer la plus grande ordonnée d'un cercle ou d'une ellipse.

L'équation du cercle est

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

en supposant l'origine des abscisses au sommet de la courbe; si on la différentie, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{y};$$

or au point du maximum, on a

$$\frac{dy}{dx} = 0;$$

donc on a l'équation

$$\frac{a-x}{y} = 0, \text{ ou } x = a.$$

Cette valeur de x substituée dans l'équation de la courbe, donne

$$y^2 = a^2, \text{ ou } y = \pm a;$$

donc la plus grande ordonnée dans le cercle est égale au rayon et elle répond à une abscisse qui est, aussi, égale au rayon : c'est donc l'ordonnée qui passe par le centre.

Dans l'ellipse, on a

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2), \text{ et } y\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a-x);$$

si on fait $\frac{dy}{dx} = 0$, on a

$$x = a:$$

cette valeur de x substituée dans l'équation de la courbe, donne

$$y^2 = b^2, \text{ et } y = \pm b:$$

donc la plus grande ordonnée de l'ellipse est égale au demi petit axe.

Problème second. Partager une ligne donnée AB en deux parties, telles que le produit de ces deux parties produise le plus grand rectangle possible. Fig. 63.

Soit la longueur de la ligne entière représentée par a; désignons par x une des parties AC; la se-

conde partie BC sera désignée par $a - x$: le produit des deux sera

$$a x - x^2 ;$$

et si on le désigne par y, on aura l'équation

$$y = a x - x^2 :$$

sa différentielle sera

$$\frac{dy}{dx} = a - 2 x :$$

on aura donc au point du maximum

$$a - 2 x = 0, \text{ ou } x = \frac{a}{2} ;$$

c'est-à-dire que la ligne donnée AB doit être coupée en deux parties égales.

Problème troisième. Deux flambeaux dont l'intensité de lumière est donnée étant placés aux extrémités d'une ligne droite AB, déterminer sur la ligne qui les sépare le point qui sera le moins éclairé. Fig. 63.

Soit l'intensité de lumière du premier flambeau représentée par m^3 ; celle du second flambeau par n^3 ; la ligne qui les sépare $= a$; la distance AC du premier flambeau (celui dont l'intensité de lumière est la plus forte) au point le moins éclairé $= x$: la distance du second flambeau au même point sera $a - x$.

Soit y la somme des deux rayons de lumière envoyés par les deux flambeaux au point C ; on aura l'équation

$$y = \frac{m^3}{x^2} + \frac{n^3}{(a-x)^2} \text{ (} \textit{Algèb.} \text{ 93) ;}$$

sa différentielle sera

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2m^3}{x^3} + \frac{2n^3}{(a-x)^3} :$$

égalant à zéro cette dernière expression, on en déduit en extrayant la racine cubique,

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{a-x}, \text{ ou } x = \frac{ma}{m+n}.$$

Si les deux flambeaux étoient d'une égale intensité de lumière, on auroit

$$m = n, \text{ et } x = \frac{a}{2};$$

c'est-à-dire que dans ce cas particulier le point le moins éclairé seroit le milieu de la ligne AB, ce qui est évident.

Problème quatrième. Dans une ellipse donnée, déterminer les diamètres conjugués qui font entre eux le plus petit angle.

Fig. 20. Soient f et g, les deux diamètres conjugués $P'C$, $R'C$; $\downarrow$ l'angle $P'CR'$ qu'ils font entr'eux; on a

$$fg \sin \downarrow = ab \text{ (174)}, \text{ et } f^2 + g^2 = a^2 + b^2;$$

la première de ces deux équations donne

$$\sin \downarrow = \frac{ab}{fg};$$

la seconde donne

$$g = \sqrt{a^2 + b^2 - f^2};$$

donc $\sin \downarrow$, que nous désignerons par y,

$$= \frac{ab}{f\sqrt{a^2 + b^2 - f^2}};$$

différentions cette équation en ne faisant varier que y et f, nous aurons

$$\frac{dy}{df} = -ab\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2-f^2} - \dfrac{f^2}{\sqrt{a^2+b^2-f^2}}}{f^2\times(a^2+b^2-f^2)}\right\};$$

dans le cas du minimum, on a

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Le second membre de l'équation égalé à zéro, donnera

$$a^2+b^2 = 2f^2;$$

mais on a aussi

$$a^2+b^2 = f^2+g^2,$$

donc

$$g^2 = f^2;$$

c'est-à-dire que les deux diamètres conjugués qui font entr'eux le plus petit angle sont égaux.

Problème cinquième. Sur un chemin donné de position par rapport à la façade d'un château, déterminer le point d'où un voyageur verra cette façade sous l'angle le plus avantageux. Fig. 64.

Soit BA la façade du château, CNO la position du chemin qui coupe en C le prolongement de la façade sous un angle connu. Désignons par m le sinus de l'angle NCB et son cosinus par n; supposons que le point qu'on cherche est en N; de ce point abaissons la perpendiculaire NK, et menons aux deux extrémités de la façade les deux lignes NB, NA: désignons CA par a, CB par b, et l'inconnue CN par x: la longueur de la façade sera $b-a$:

d'après toutes ces données, on aura

$$NK = mx \ldots CK = nx;$$

la tangente de l'angle $BNk = \frac{BK}{NK} = \frac{b - nx}{mx} \ldots$

la tangente de l'angle $ANk = \frac{AK}{NK} = \frac{a - nx}{mx}$:

donc la tangente de $BNA = \frac{\frac{BK - AK}{NK}}{1 - \frac{BK.AK}{NK^2}}$

(*Trigonométrie note* 14.) $= \frac{(b-a)mx}{x^2 + ab - (a+b)x}$.

Représentons cette tangente par y, on aura en différentiant

$$\frac{dy}{dx} = (b-a)m\left\{\frac{x^2 + ab - (a+b)x - 2x^2 + (a+b)x}{(x^2 + ab - (a+b)x)^2}\right\}$$

$$= \frac{ab - x^2}{(x^2 + ab - (a+b)x)^2};$$

on aura donc au point du maximum,

$$ab = x^2;$$

ce qui donne cette proportion

$$b : x :: x : a.$$

Si on suppose un cercle passant par les deux points donnés B, A, et touchant la ligne CO en un point N, on aura cette proportion

$$BC : CN :: CN : CA \text{ (} Géom. \text{ 183)},$$

ou $$b : CN :: CN : a,$$

L'inconnue x sera donc la tangente CN au cercle

BAN, passant par les deux extrémités de la façade et touchant la ligne CO au point N qu'il s'agit de connoître.

Pour le déterminer, on prendra l'équation

$$x^2 = ab,$$

et extrayant la racine quarrée des deux membres, on a $x = \sqrt{ab}$;

la ligne CN est donc moyenne proportionnelle entre les deux lignes BC et CA.

Probléme sixième. Déterminer quelle doit être l'ouverture que doivent avoir les pieds de l'homme pour lui donner la base de sustentation la plus avantageuse.

On appelle base de sustentation le quadrilatère intercepté entre les longueurs des pieds et les lignes qui joignent leurs pointes et leurs talons. Fig. 65.

Soit représentée par les deux lignes égales AB, $A'B'$ la longueur des deux pieds : la ligne AA' sera la distance qui sépare les extrémités des talons. Chaque pied en s'ouvrant tourne, selon Barthez, autour du point fixe que lui donne son talon : la base de sustentation sera donc le trapèze

$$AA'B'B:$$

il faut donc chercher quelle doit être la position des pieds pour que la surface de ce trapèze soit la plus grande possible.

Soit $AA' = a \ldots AB$, ou $A'B' = b \ldots$ l'angle BAD, ou $B'A'D' = \varphi$; on aura

BD, ou $B'D' = b \sin \varphi \ldots AD$, ou $A'D' = b \cos \varphi$:

l'expression de la surface du trapèze de sustentation sera donc

$$(2a + 2b \sin \varphi) \frac{b \cos \varphi}{2},$$

Soit cette surface $= z$, on aura l'équation

$$z = (a + b \sin \varphi)\, b \cos \varphi = a\, b \cos \varphi + \frac{b^2 \sin 2\varphi}{2} ;$$

en la différentiant, et égalant à zèro $\frac{dz}{d\varphi}$, on a

$$a - a\, b \sin \varphi + b^2 \cos 2\varphi = 0 ;$$

d'où on déduit

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} ;$$

c'est-à-dire que le rapport du cosinus de l'angle BCB', que font les prolongemens des deux pieds au sinus de la moitié du même angle, doit être le même que celui de la distance des deux talons à la longueur du pied.

En mettant à la place de $\cos 2\varphi$ sa valeur $1 - 2 \sin^2 \varphi$, et résolvant l'équation du second dégre $\sin^2 \varphi + \frac{a}{2b} \sin \varphi = \frac{1}{2}$, on a

$$\sin \varphi = \frac{a}{4b} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{a}{16\, b^2}} .$$

Si on fait $a = b$, on a

$$\sin \varphi = \tfrac{1}{4} ;$$

donc lorsque la distance du centre des talons est égale à la longueur des pieds, l'angle que font leurs prolongemens, c'est-à-dire 2φ, est de 60° (1).

(1) En prenant pour rayon la ligne qui joint les centres des talons, dit Barthez (Mécanique des mouvemens de l'Homme et des Animaux, page 24, note.), on trouve que l'ouverture des deux pieds doit être de 38° 56′ pour que le trapèze de sustentation soit un maximum ; mais il est visible

Problême septième. La vîtesse des deux corps et leur position respective sur deux lignes droites étant données, déterminer le point où ils seront entr'eux à la plus petite distance.

Soit représenté par φ l'angle BCA, que font entr'elles les deux lignes BC, AC, dont la position est connue : supposons les deux corps au moment du départ, placés l'un au point A, l'autre au point B; on connoîtra la perpendiculaire BD, et la partie AD de la ligne CA : désignons cette perpendiculaire par a, et la ligne AD par b. Soit le rapport des vîtesses des deux corps $A, B :: m:n$, m étant $> n$: l'espace AR parcouru par le corps A, $= x$; $\frac{nx}{m}$ sera l'espace BS parcouru dans le même temps par le corps B, et la distance des deux corps sera mesurée par la ligne RS, que nous représenterons par y : on aura Fig. 66.

$$BH = \frac{nx}{m} \sin \varphi; SH = \frac{nx}{m} \cos \varphi,$$

---

que le rayon de l'arc BAD est la longueur du pied b, et non la distance des talons a; et supposer que a est le rayon, c'est supposer $a = b$: or dans cette supposition, l'ouverture des deux pieds est de 60°, comme on vient de le voir : le rapport de $a:b$ est par sa nature indéterminé, parce que la longueur du pied n'est pas la même dans chaque individu et que d'ailleurs la distance des talons peut varier jusqu'à un certain point. Pour résoudre le problême dans le sens de l'auteur, il faudroit assigner préalablement le rapport de $a:b$; si l'on veut que l'angle que font les deux pieds soit de 38° 56′, il faut que $\frac{a}{b} = \frac{\cos 38° 56'}{\sin 19° 28'} = 2,33\ 43$; c'est-à-dire que la distance des talons doit égaler deux fois et un tiers, à-peu-près la longueur du pied, ce qui n'est pas la position la plus naturelle : ainsi il y a lieu de croire qu'il s'est glissé quelque erreur dans cet article de l'ouvrage dont l'énoncé du problême est extrait.

et $$RS^2 = \overline{ST}^2 + RT^2,$$

ou

$$y^2 = \left(a - \frac{nx}{m}\sin\varphi\right)^2 + \left(x - b - \frac{nx}{m}\cos\varphi\right)^2 :$$

différentiant cette équation, on a

$$y\frac{dy}{dx} = -\frac{n}{m}\sin\varphi\left(a - \frac{nx}{m}\sin\varphi\right)$$
$$+\left(1 - \frac{n}{m}\cos\varphi\right)\left(x - b - \frac{n}{m}\cos\varphi\, x\right):$$

au point du minimum $\frac{dy}{dx} = 0$, on aura donc

$$x = \frac{amn\sin\varphi + b(m^2 - mn\cos\varphi)}{m^2 - 2mn\cos\varphi + n^2}.$$

Si les deux lignes CB, CA, étoient parallèles, on auroit

$$\sin\varphi = 0 \ldots \cos\varphi = 1 \ldots x = \frac{bm}{m-n}, \text{ et } y = a;$$

c'est-à-dire que la plus petite distance des deux corps auroit lieu lorsqu'ils seroient aux deux extrémités de la perpendiculaire aux deux lignes parallèles, laquelle seroit égale à BD.

Des caractères qui distinguent les maxima et les minima.

318. On a vu (314) que si on a l'équation $y = Fx$, au point des maxima et des minima, on a

$$\frac{dy}{dx} = 0:$$

on a vu aussi que si la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négative lorsque $\frac{dy}{dx} = 0$, la fonction donnée devient un maximum ; si la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positive, la fonction donnée devient un minimum ; mais si la valeur de x, qui rend $\frac{dy}{dx} = 0$ rend aussi $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ sans que $\frac{d^3y}{dx^3}$ soit nul, la fonction donnée n'aura ni maximum ni minimum : pour s'en convaincre, il suffit d'observer que dans cette supposition on aura

$$'P'M = y - \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots \&c.$$

$$P'M' = y + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots \&c.$$

Or, la première valeur est plus petite que y, et la seconde plus grande ; donc y n'est ni maximum ni minimum : mais si $\frac{d^3y}{dx^3}$ est nul en même-temps que les deux termes qui précèdent, il y aura maximum ou minimum, suivant que $\frac{d^4y}{dx^4}$ sera négatif ou positif : car on a pour lors

$$'P'M = y + \frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} - \ldots\ldots\text{etc.}$$

$$P'M' = y + \frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots\ldots\text{etc.}$$

Si $\frac{d^4y}{dx^4}$ est positif, les deux ordonnées $'P'M, P'M'$

seront plus grandes que y; et si $\frac{d^4y}{dx^4}$ est négatif, les deux ordonnées seront moindres que y; donc dans le premier cas, y sera un minimum, et il sera un maximum dans le second.

En général, pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut que l'exposant du premier terme qui ne s'évanouit pas dans le développement de $F(x+k)$ soit pair; il y aura en particulier maximum, lorsque le premier terme d'un exposant pair qui ne s'évanouit pas est négatif, et il y aura minimum, lorsqu'il est positif: ainsi dans le premier problème (317), on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y};$$

différentiant une seconde fois, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}$$

en mettant à la place de x la valeur a tirée de l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$, et comme ce résultat est négatif, il s'ensuit que la fonction cherchée est un maximum.

Dans le problème second, on a

$$\frac{dy}{dx} = a - 2x, \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2} = -2;$$

résultat négatif, dont la fonction cherchée est un maximum.

Dans le problème troisième, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2m^3}{x^3} + \frac{2n^3}{(a-x)^3};$$

et

et $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6m^3}{x^4} + \frac{6n^3}{(a-x)^4}$$

quantité positive, quelle que soit la valeur de x, dont la fonction cherchée est un minimum.

Dans le problème quatrième, on a

$$\frac{dy}{df} = -ab\left\{\frac{a^2+b^2-2f^2}{f^2(a^2+b^2-f^2)^{\frac{3}{2}}}\right\};$$

d'où on tire

$$\frac{d^2y}{df^2} = -ab\left(-\frac{4f}{f^4y^2}\right),$$

en faisant $a^2+b^2-f^2=f^2$, et $a^2+b^2-2f^2=o$ en vertu de l'équation $\frac{dy}{df}=o$: or cette différentielle seconde est positive; donc la fonction cherchée est un minimum.

Si on cherche la plus grande ou la plus petite ordonnée de la courbe dont l'équation est

$$y=\left(\frac{x-a}{b^2}\right)^3+c,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx}=3.\left(\frac{x-a}{b^2}\right)^2$$

donc au point du maximum ou du minimum, on aura $x=a$:

pour savoir si on a un maximum ou un minimum, on prendra la différentielle seconde

$$\frac{d^2y}{dx^2}=3.2.\left(\frac{x-a}{b^2}\right):$$

et comme la valeur de $x = a$ rend cette différentielle $= 0$, on passera à la troisième

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3.2}{b^2};$$

la supposition de $x = a$ ne faisant pas évanouir celle-ci, c'est un indice que la courbe dont on a différentié l'équation, n'a ni maximum ni minimum.

Il suit de ce qui précède, que toutes les fois que la fonction proposée a un maximum ou un minimum, on a

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

mais la proposition inverse n'est pas généralement vraie ; il faut encore considérer ce que deviennent les différentielles des ordres supérieurs, comme on l'a vu dans les exemples précédens.

319. Soit l'équation $z = F(x, y)$, et voyons quelles sont les conditions des maxima et minima, dans une pareille fonction à deux variables.

Pour que la fonction cherchée soit un maximum ou un minimum, il faut qu'en mettant $x \pm k, y \pm i$, à la place de x, y dans la fonction donnée, les ordonnées qui précèdent et qui suivent z, que nous représenterons par $'z$, et z' soient toutes les deux plus grandes que z dans le cas du minimum, et toutes deux moindres que z dans le cas du maximum, la formule du développement du n°. (301), donne

$$'z = z - \left(k\left(\frac{dz}{dx}\right) + i\frac{dz}{dy}\right) + M$$

$$z = z$$

$$z' = z + \left(k\frac{dz}{dx} + i\frac{dz}{dy}\right) + N$$

M et N désignent la somme de tous les termes suivans des deux séries, laquelle somme sera moindre que le terme qui précède (91) : or il est visible que $'z$, et z' ne seront toutes deux plus grandes ou plus petites que z, que lorsqu'on aura

$$k\frac{dz}{dx}+i\frac{dz}{dy}=0:$$

mais les accroissemens k, i sont indépendans entr'eux, donc chaque terme doit être zéro séparément, ce qui fournit les deux équations

$$\frac{dz}{dx}=0\ldots\frac{dz}{dy}=0,$$

d'où il suit que pour avoir la condition du maximum ou du minimum d'une fonction de deux variables, on différentiera la fonction en regardant une variable comme constante; on différentiera de nouveau la même fonction, en regardant l'autre variable comme constante, on égalera à zéro chaque différentielle; on formera ainsi deux équations, qui serviront à déterminer la valeur des deux variables dans le cas du maximum ou du minimum.

320. *Premier problème.* Couper une ligne donnée m en trois parties, de manière que le produit de ces trois parties soit un maximum.

Soit une de ces trois parties $=x$, la seconde $=y$, la troisième $=m-x-y$: faisons le produit de ces trois parties $=z$, on aura l'équation

$$z=mxy-x^2y-y^2x:$$

on en déduira les deux équations suivantes :

$$\frac{dz}{dx}=my-2xy-y^2\ldots\frac{dz}{dy}=mx-2xy-x^2:$$

égalant à zéro ces deux équations, on aura

$$m - 2x - y = 0 \ldots m - 2y - x = 0 :$$

ces deux dernières donnent

$$x = \frac{m}{3} \ldots y = \frac{m}{3},$$

et par conséquent la troisième partie $= \frac{m}{3}$: donc la ligne donnée doit être coupée en trois parties égales, et le produit des trois parties sera un cube.

Probléme second. Parmi tous les parallélipipèdes rectangles qui ont même solidité, déterminer celui dont la surface entière est un minimum.

Soient les trois arêtes d'un même angle solide désignées par x, y, z : la solidité $= a^3$, et la surface $= s$: les conditions du problême donneront les deux équations suivantes :

$$xyz = a^3 \ldots . s = 2xy + 2xz + 2yz :$$

substituant dans cette dernière la valeur de z prise dans la première, on a

$$s = 2xy + \frac{2a^3}{y} + \frac{2a^3}{x}.$$

Différentiant d'abord par rapport à x, et ensuite par rapport à y, et égalant chaque différentielle à zéro, on aura

$$2y - \frac{2a^3}{x^2} = 0 \ldots 2x - \frac{2a^3}{y^2} = 0 :$$

ces deux équations donnent

$$y = x :$$

on aura donc

$$2x^3 = 2a^3, \text{ ou } x = a,$$

et par conséquent

$$y = a, \text{ et } z = a:$$

donc le parallélipipède demandé est un cube.

Problème troisième. Déterminer quel doit être l'angle du lozange qui couronne les alvéoles des abeilles, et le rapport qui doit exister entre la hauteur et le côté de l'hexagone de la base, pour que la surface soit la moindre possible, sous une solidité donnée.

La forme des alvéoles des abeilles est un prisme hexagonal, dont les six pans latéraux sont des trapèzes surmontés par trois lozanges qui, en se réunissant par leurs extrémités, forment un angle solide. Fig. 67.

Soit le côté AB de l'hexagone de la base $= y$, le plus grand côté AH du trapèze $= m$, la différence MH des deux côtés du trapèze $= x$, la surface de chaque trapèze sera

$$(2m - x)\frac{y}{2},$$

et par conséquent celle des six trapèzes, ou la surface latérale $= 6my - 3xy$.

La surface du rhombe $FHGD = HD \times FI$: or,

$$HD = y\sqrt{3} \ldots \overline{HF}^2 = \overline{HM}^2 + \overline{MF}^2 = x^2 + y^2;$$

et

$$\overline{FI}^2 = \overline{HF}^2 - \overline{HI}^2 = x^2 + y^2 - \frac{3y^2}{4} = x^2 + \frac{y^2}{4}:$$

donc la surface des trois lozanges

$$= 3y\sqrt{3} \times \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}.$$

Soit z la surface totale du lozange, abstraction faite de la base, on aura

$$z = 6my - 3xy + 3y\sqrt{3} \times \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$$

La solidité d'un pareil corps est égale à la base hexagonale multipliée par la hauteur m, donc, si on représente la solidité par a^3, et la base hexagonale par $\frac{3y^2\sqrt{3}}{2}$, on aura

$$a^3 = \frac{3y^2\sqrt{3}}{2} \times m, \text{ ou } m = \frac{2a^3}{3y^2\sqrt{3}};$$

cette valeur substituée à la place de m dans l'expression de la surface, donne

$$2z = \frac{4a^3}{y^2\sqrt{3}} - 3xy + 3y\sqrt{3} \times \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}.$$

Si on différentie cette équation, d'abord par rapport à y, et ensuite par rapport à x, et qu'on égale à zéro les deux différentielles, on aura les deux équations suivantes :

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{4a^3}{y^2\sqrt{3}} - 3x + 3\sqrt{3} \times \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} + \frac{3\sqrt{3}xy^2}{4\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = -3y + \frac{3yx\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}} = 0;$$

on tire de la seconde

$$x\sqrt{3} = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}, \text{ ou } y^2 = 8x^2.$$

Cette valeur substituée dans la première, en y mettant à la place de a^3 sa valeur $\frac{3y^2m\sqrt{3}}{2}$, donne

$$m = 2x,$$

et par conséquent

$$y^2 = 2m^2, \text{ ou } \frac{y}{m} = \sqrt{2}:$$

tel est le rapport qui doit exister entre le côté AH du trapèze, et le côté AB de l'hexagone de la base.

L'équation $y^2 = 8x^2$ donne $x = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, et par conséquent

$$\frac{FI}{HI}, \text{ ou } \frac{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}}{\frac{y}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{y}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{y}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}}:$$

donc la tangente de l'angle $FHI = \sqrt{\frac{1}{2}}$: et par conséquent celle de l'angle total $FHG = 2\sqrt{2} = 2,8284\ldots$. Le logarithme de ce nombre est 0,4515408, donc l'angle $FHG = 70° 31' 45''$, et par conséquent l'angle $HGD = 109° 28' 16''$: l'ange solide sera donc $328° 24' 48''$ (1).

(1) Ce problême, tel qu'on vient de le résoudre, a beaucoup de rapport avec un problême de cristallographie, qui consiste à trouver les angles solides et les autres dimensions du grenat dodécaèdre; en effet, si on prend deux solides égaux, et semblables à celui dont on vient de déterminer

Toutes les fois que $F(x,y)$ sera un maximum ou minimum, on a

$$\frac{dz}{dx} = 0 \ldots \frac{dz}{dy} = 0 :$$

mais l'inverse de cette proposition n'est pas généralement vraie, il faut encore être assuré que la somme des termes suivans, dans le développement de $F(x+k,y+i)$, n'est pas zéro (318). La distinction des maxima d'avec les minima, renferme plus de difficultés à l'égard des fonctions de deux ou plusieurs variables, que par rapport aux fonctions d'une seule variable, quoique fondée sur les mêmes principes. Cette question a été traitée par Lagrange, dans le premier volume de l'académie de Turin; il l'a présentée depuis sous une autre forme, dans la Mécanique analytique, et dans la Théorie des fonctions analytiques. On la retrouve dans le calcul différentiel de Cousin, dans celui de Lacroix, et dans les cahiers de l'école polytechnique.

Application du calcul différentiel à la détermination des points doubles, d'inflexion, rebroussement, &c.

321. On a vu qu'un point commun à deux branches de la même courbe qui se coupent est appelé point double (210), et qu'on peut toujours mener par un point double deux tangentes différentes, dont la direction détermine celle des deux branches de la courbe qui passent par ce point: or la direc-

---

les conditions du maximum de surface, et qu'on les adosse par leurs bases hexagonales, on aura le grenat dodécaèdre *Gf'*. (*Voyez* la Cristallographie de Haüy.)

tion de la tangente à un point quelconque de la courbe dépend de la valeur de $\frac{dy}{dx}$; donc aux points doubles la valeur de ce coefficient différentiel doit être donnée par une équation du second degré. Si le point est triple, on pourra mener par ce point trois tangentes différentes, et par conséquent la valeur de $\frac{dy}{dx}$ devra être donnée par une équation du troisième degré, et ainsi des autres points multiples.

L'ordonnée de la courbe à un point double n'ayant qu'une valeur, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, pour ce point double, ne sauroit en avoir plusieurs, donc il ne peut donner que la position d'une tangente; mais il n'y a pas plus de raison pour qu'il donne la position de l'une plutôt que celle de l'autre; donc il doit rester vague et indéterminé, et l'équation différentielle doit se vérifier indépendamment de la valeur du coefficient $\frac{dy}{dx}$.

Soit l'équation de la courbe débarrassée de radicaux $F.(x,y) = 0$, sa différentielle première aura un certain nombre de termes multipliés par dy, et les autres multipliés par dx: on pourra donc la mettre sous la forme suivante:

$$M\,dx + N\,dy = 0\ldots$$

M et N étant des fonctions de x et y, ou

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0;$$

et puisqu'elle doit avoir lieu indépendamment de

la val ur de $\frac{dy}{dx}$, on aura séparément

$$M=0,\ldots N=0,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=\frac{0}{0}.$$

Si on prend la différentielle seconde de l'équation proposée $F(x,y)=0$, en regardant dx comme constante, on a

$$N\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy^2}{dx^2}+Q\frac{dy}{dx}+R=0\ldots$$

P, Q, R étant des fonctions de x, y : cette équation donne généralement la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$; mais dans le cas particulier dont nous nous occupons, on a $N=0$:
le premier terme disparoît, et l'équation restante contiendra $\frac{dy}{dx}$, élevé à la seconde puissance : la résolution de cette équation donnera les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, qui déterminent la position des deux tangentes au point double.

322. Puisque dans la supposition de l'existence d'un point double M et N sont nuls chacun séparément, il s'ensuit que dans la différentielle seconde de l'équation $F(x,y)=0$, les termes $M\,d^2x$, Nd^2y, manqueront : ainsi en différentiant l'équation $M\,dx+N\,dy=0$, on peut regarder dx et dy comme constantes, et prendre seulement la différentielle des coefficiens M et N.

Il suit de ce qui précède, que pour déterminer si une courbe a un point double, il faut prendre la différentielle première de l'équation, en tirer la valeur du rapport $\frac{dy}{dx}$, qui sera donnée par une fraction de la forme $\frac{F.(x,y)}{f(x,y)}$; on fera le numérateur et le dénominateur de cette fraction = zéro, chacun séparément, et on aura autant de points doubles qu'on trouvera de valeurs différentes de y, qui avec les valeurs correspondantes de x, satisferont à l'équation de la courbe.

323. Soit l'équation de la conchoïde

$y^4-2by^3+(b^2-a^2+x^2)y^2+2a^2by-a^2b^2=0$(196), Fig. 30.

en la différentiant, on a

$\{4y^3-6by^2+2(b^2-a^2+x^2)y+2a^2b\}dy+2yxdx=0$:

égalant à zéro les coefficiens de dx et dy, on tire du premier

$$x=0;$$

cette valeur substituée dans le second, donne

$$y=b:$$

ces deux valeurs satisfont à l'équation de la courbe, donc la conchoïde raccourcie a un point double répondant à l'abscisse = zéro et à l'ordonnée = b.

Pour déterminer la position des tangentes à ce point double, on différentiera de nouveau l'équation en faisant dy et dx constantes: on aura une équation du second degré pour déterminer $\frac{dy}{dx}$; et si les mêmes valeurs de x et y qui ont $\frac{F(x,y)}{f.(x,y)}=\frac{0}{0}$

font disparoître tous les termes de la différentielle seconde, le point sera triple.

Si l'équation du second degré

$$P\frac{d^2y}{dx}+Q\frac{dy}{dx}+R=0,$$

donnée par la différentielle seconde de l'équation de la courbe, avoit ces deux racines égales, les deux branches passant par ce point ne s'y couperoient pas, elles ne feroient que se toucher.

Prenons pour second exemple d'un point multiple la courbe dont l'équation est

$$y^4-axy^2+bx^3=0;$$

en la différentiant, on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay^2-3bx^2}{4y^3-2axy};$$

égalant à zéro le numérateur et le dénominateur séparément, on a

$$x=0\ldots y=0.$$

Ces deux valeurs satisfont à l'équation de la courbe; donc elle a un point multiple à l'origine des abscisses. Pour déterminer le degré de multiplicité, on différentiera de nouveau l'équation en faisant dx et dy constantes; on aura

$$(12y^2-2ax)dy^2-4ay.dy\,dx+(6bx)dx^2=0.$$

La supposition de $x=0$, $y=0$, rend tous les termes de cette dernière équation $=0$; donc le point en question est plus que double: on prendra la différentielle troisième en faisant dy et dx constantes, on aura

$$24y\,dy^3-6a\,dx\,dy^2+6b\,dx^3=0.$$

La supposition de $y = 0$ réduit celle-ci à

$$-a\,dx\,dy^2 + b\,dx^3 = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{dy^3}{dx^3} - \frac{b}{a}\frac{dy}{dx} = 0 :$$

cette équation a trois racines, savoir ;

$$\frac{dy}{dx} = 0 \ldots \frac{dy}{dx} = +\sqrt{\frac{b}{a}} \ldots . d.\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{b}{a}};$$

donc la courbe en question a un point triple à l'origine des abscisses. La première valeur de $\frac{dy}{dx}$ annonce qu'une des branches qui passent par ce point a sa tangente parallèle à l'axe des abscisses.

324. Le caractère distinctif des points d'inflexion est qu'à ce point la même ligne est en même temps tangente à la partie concave AM, et à la partie convexe MM' (212) : soit l'équation de la courbe qui a un point d'inflexion $y = F.x$; supposons l'ordonnée PM, menée au point d'inflexion ; menons les deux ordonnées $P'M'$, $'P'M$, l'une au-dessous, l'autre au-dessus de PM, et à une distance égale à k, on aura Fig. 68.

$$P'M' = y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

$$'P'M = y - k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

La partie de l'ordonnée $P'M'$ comprise entre la tangente et la courbe, est égale à

$$+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + k^3\frac{d^3y}{dx^3}\,(302) ;$$

et la partie de l'ordonnée supérieure $'P'M$ comprise entre la tangente et la courbe, est égale à

$$+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{k^3}{2.3}\frac{dy^3}{dx^3};$$

et par la nature du point d'inflexion $'P'M$ doit être négatif, et $p'M'$ positif, ou réciproquement : or il est visible que pour qu'une de ces deux lignes soit essentiellement positive et l'autre négative, il faut que le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. On reconnoîtra donc l'existence du point d'inflexion à l'équation de condition $\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

Si la valeur de x qui fait évanouir $\frac{d^2y}{dx^2}$, fait évanouir $\frac{d^3y}{dx^3}$, la quantité $P'M'$ réduite alors à $\frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}$... conservera le même signe, soit qu'on prenne la quantité k positive, soit qu'on la prenne négative ; la courbe ne subira donc pas d'inflexion au point M, ou elle aura une inflexion double invisible (215). En donnant au raisonnement toute sa généralité, on verra que toutes les fois que le premier des termes qui ne s'évanouit pas est affecté d'une puissance impaire de k, la courbe subira une inflexion visible ; et si le premier des termes qui ne s'évanouit pas est multiplié par une puissance paire de k, l'inflexion sera invisible : ainsi si l'on a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

l'inflexion est simple ; si l'on a encore

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

le point en question a une inflexion double ou un serpentement ; si l'on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 0,$$

le point d'inflexion sera triple.

325. Soit l'équation de la première parabole cubique

$$y^3 = p^2 x, \text{ ou } x^3 = p^2 y,$$ Fig. 33.

en changeant entr'eux les axes des abscisses et des ordonnées : si on la différentie deux fois de suite, on a

$$\frac{6x}{p^2} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

La supposition de $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, donne

$$x = 0,$$

sans que la même supposition fasse disparoître la différentielle troisième ; donc la courbe a une inflexion à l'origine des abscisses.

Soit la courbe dont l'équation est

$$a^2 y = (b - x)^3 + c^3 ;$$

en la différentiant deux fois, on a

$$a^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 6(b - x) :$$

cette valeur égalée à zéro, donne

$$x = b,$$

sans que la différentielle troisième s'évanouisse par

la même supposition ; donc l'abscisse $x = b$ répond à un point d'inflexion.

Soit la branche supérieure de la conchoïde dont l'équation est

Fig. 29. $$xy = (b+y)\sqrt{a^2-y^2} \ldots (196)$$

sa différentielle première est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^2b+y^3};$$

en la différentiant une seconde fois, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{\frac{(a^2b+y^3)(3y^3-2a^2y)+3a^2y^4-3y^6}{(a^2b+y^3)^2\times\sqrt{a^2-y^2}}\right\}\frac{dy}{dx}.$$

Si l'on fait $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, on aura l'équation

$$y^3+3by^2-2a^2b = 0:$$

les racines de cette équation dépendent du rapport de $a : b$; mais quel que soit ce rapport, il n'y aura jamais qu'une racine qui donne un point d'inflexion.

Soit la cycloïde alongée dont l'équation est

Fig. 38. $$y = \frac{p}{q}u + a\sin\frac{u}{a},$$

p étant $> q$; en la différentiant, on a 1°.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(p+q)-qx}{q(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

différentiant de nouveau, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{apx-a^2(p+q)}{q(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

faisant $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, on a

$x = a$

$$x = a\left(\frac{p+q}{p}\right);$$

et comme cette valeur de x ne fait pas évanouir $\frac{d^3y}{dx^3}$, il s'ensuit que la cycloïde alongée subit une inflexion au point correspondant à l'abscisse $x = a\left(\frac{p+q}{p}\right)$.

On voit par tout ce qui précède, que l'existence d'un point d'inflexion suppose que la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour tout autre point que celui d'inflexion, prend après le point d'inflexion un signe contraire à celui qu'elle avoit avant; en sorte que si elle est négative pour toute l'étendue de la courbe qui précède le point d'inflexion, elle sera positive pour la partie de la courbe qui suit, et réciproquement. Lorsque cette valeur est exprimée par une fraction, comme dans les deux derniers exemples, ce changement du positif au négatif ou réciproquement, peut arriver de deux manières différentes, ou parce que le numérateur passe du positif au négatif, ou parce que ce passage a lieu dans le dénominateur; mais une quantité ne peut passer du positif au négatif, ou réciproquement, sans passer par zéro; donc au point d'inflexion, le numérateur ou le dénominateur de la fraction exprimant la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ devient zéro; dans le premier cas la fraction $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, dans le second, elle devient infinie; ainsi pour découvrir les points d'inflexion dans une courbe, il

ne suffit pas de faire $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$, il faut encore faire $\frac{d^n y}{dx^n} = \infty$.

Voyons à présent à quels indices on reconnoîtra les points de rebroussement.

Fig. 69. 326. Au point de rebroussement M, l'ordonnée PM a deux valeurs égales; la tangente MT y est commune aux deux branches, une des deux MM', étant au-dessous de la tangente, l'autre MM'' étant au-dessus : la partie $M'H$, ou $M''H$, de l'ordonnée comprise entre la tangente et la courbe sera donc négative pour la branche inférieure, et positive pour la branche supérieure.

Il suit des observations précédentes, que l'équation des courbes ayant des points de rebroussement de la première espèce, peut être mise sous la forme

$$y = f.x \pm X(x-a)^{\frac{m}{n}},$$

m étant un nombre impair, n un nombre pair, et a étant la valeur de x qui répond au point de rebroussement.

Les valeurs de $M'H$, $M''H$ seront données généralement par les termes de la série

$$\frac{k^n}{2}\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4 y}{dx^4} + \text{ &c.}$$

laquelle série sera double, à cause du double signe $\pm$ dans la valeur de y.

Mais si on part de l'ordonnée qui répond à $x = a$, le radical $\pm(x-a)^{\frac{m}{n}}$ disparoîtra; y n'aura à ce point qu'une seule valeur, et la série

$$\frac{k^2\,d^2y}{2\,dx^2}+\frac{k^3\,d^3y}{2.3\,dy^3}+\ldots\&c.$$

n'étant pas double pour cette valeur particulière de y, ne pourra donner qu'une valeur pour $M'H$, et comme il n'y a aucune raison déduite de la nature de la question pour qu'elle donne celle de $M'H$ plutôt que celle de $M''H$, la série se présentera sous une forme vague et indéterminée.

On a vu (300) qu'il y a des fonctions où, pour certaines valeurs particulières de x, les coefficiens différentiels de la série deviennent zéro ou infinis; ce cas a lieu sur-tout lorsque les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, &c. sont donnés sous une forme fractionnaire, renfermant dans le dénominateur une fonction de x qui s'évanouit lorsqu'on fait $x=a$; c'est ce qui arrive dans les équations de la forme

$$y=fx\pm X(x-a)^{\frac{m}{n}},$$

lorsque n est un nombre pair, m un nombre impair, et $x=a$. Soit par exemple l'équation

$$y=bx\pm(x-a)^{\frac{3}{2}};$$

on a, lorsque $x=a$,

$$\frac{dy}{dx}=b,\ \text{et}\ \frac{d^2y}{dx^2}=\infty\ldots$$

Soit encore $y=bx\pm(x-a)^{\frac{5}{2}}$;

on aura, dans la même supposition,

$$\frac{dy}{dx}=b\ldots\frac{d^2y}{dx^2}=b\ldots\frac{d^3y}{dx^3}=\infty.$$

Si l'équation est

$$y = bx \pm (x-a)^{\frac{7}{2}},$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = b \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \ldots \frac{d^4y}{dx^4} = \infty \ldots$$

et ainsi des autres : or toutes les équations de cette forme appartiennent à des courbes qui ont des points de rebroussement ; donc on peut dire que le caractère distinctif des points de rebroussement de la première espèce (213) est comme pour les points d'inflexion $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, ou ∞.

327. Soit la seconde parabole cubique, dont l'équation est

Fig. 34.

$$y^3 = px^2, \text{ ou } y^2 = \frac{x^3}{p^2};$$

en changeant x en y, et réciproquement, on aura

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}};$$

différentiant deux fois, on a

1°. $$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots$$

2°. $$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{px}};$$

la supposition de $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, donne $x = 0$; donc la courbe a un point de rebroussement à l'origine des abscisses.

Soit la branche inférieure de la conchoïde dont l'équation est

$$xy = (b-y)\sqrt{a^2-y^2}:$$ Fig. 31.

en la différentiant deux fois comme dans le n°. (327), on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{\frac{(y^3-a^2b)(2a^2y-3y^3)-3a^2y^4+3y^6}{(y^3-a^2b)\sqrt{a^2-y^2}}\right\}\frac{dy}{dx};$$

mettant à la place de $\frac{dy}{dx}$ sa valeur, celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$ deviendra

$$\left\{\frac{(y^3-a^2b)(2a^2y-3y^3)-3a^2y^4+3y^6}{(y^3-a^2b)^3}\right\}y^2;$$

si l'on fait $b=a$ (196), on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty,$$

lorsque $y=a$; donc la conchoïde inférieure a un point de rebroussement lorsque $b=a$, et ce point répond à l'ordonnée $y=a$ et $x=0$.

Soit la cycloïde ordinaire dont l'équation est

$$y = \text{Arc.}\left(a.2(n+1)\pi+u\right)+a\sin\frac{u}{a}:$$ Fig. 37.

la différentielle seconde de cette équation est

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-a}{x\sqrt{2ax-x^2}} \quad (308).$$

En faisant $x=2a$, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty;$$

donc la cycloïde ordinaire, conçue de la manière la plus générale, a un point de rebroussement qui répond à l'abscisse $x = 2a$.

L'arc du cercle générateur qui répond à l'abscisse $2a$, est la moitié de la circonférence, ou $a\pi$; en donnant à n toutes les valeurs possibles en nombres entiers, on trouve que les différentes ordonnées qui répondent à l'abscisse $2a$ sont, $a\pi$, $3a\pi$, $5a\pi$, $7a\pi$... &c; c'est-à-dire qu'à chaque révolution du cercle générateur, il y a un point de rebroussement.

On a vu que les conditions qui donnent les points de rebroussement, sont les mêmes que celles qui donnent les points d'inflexion : on distinguera les uns des autres par les observations suivantes :

1°. Au point d'inflexion, l'ordonnée n'a qu'une valeur, à moins qu'elle ne soit tangente à la courbe, au lieu qu'au point de rebroussement elle en a deux ou plusieurs qui deviennent égales par l'évanouissement d'un radical : 2°. si après s'être assuré de l'existence d'un point singulier, et avoir trouvé que l'ordonnée correspondante est $x = a$, on fait $x = a \pm k$, et que la valeur de y soit réelle dans les deux suppositions de $x = a + k$, et $x = a - k$, le point en question est un point d'inflexion ; si au contraire, la valeur de y est imaginaire dans une des deux suppositions, le point singulier est un point de rebroussement.

Conclusion générale.

328. Il résulte de tout ce qu'on a vu dans l'application du calcul différentiel à la géométrie, que la formule générale du développement

$$y'=y\pm k\frac{dy}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\pm\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}\ldots,$$

suffit pour juger des affections particulières des courbes; car, 1°. le second terme du développement donne la valeur du rapport $\frac{dy}{dx}$ nécessaire pour mener les tangentes : 2°. si pour une valeur particulière de x, ce coefficient différentiel est zéro, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, et l'ordonnée correspondante peut être un maximum ou un minimum : 3°. on distingue les maxima des minima, par le signe du second coefficient différentiel; 4°. si le coefficient est zéro, sans que le suivant le soit, il n'y aura ni maximum ni minimum, mais la courbe aura un point d'inflexion ou de rebroussement : 5°. si la même valeur de x rendoit nuls les coefficiens

$$\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}\ldots,\text{\&c.}$$

la courbe auroit à ce point une inflexion invisible, ou un serpentement : 6°. si pour une valeur de x on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0},$$

la courbe aura un point double ou multiple, et ainsi des autres affections de la courbe.

Usages analytiques du calcul différentiel.

229. Le calcul différentiel est employé avec succès dans les questions de l'analyse, comme dans celles de la géométrie.

On a vu (301) que si on a une équation quel-

conque en x et y, ou simplement en x, laquelle doive avoir lieu, quelle que soit la valeur de x, les équations différentielles de tous les ordres auront aussi lieu, chacune séparément: ces équations combinées entr'elles, et avec l'équation première, donneront souvent des équations plus simples et plus faciles à résoudre.

Proposons-nous, pour premier exemple, d'élever un polynome quelconque à la puissance n; on sait qu'on pourroit en venir à bout par les loix du binome; mais le calcul en seroit très-long et très-embarrassant; la longueur et les difficultés disparoissent par l'application des nouveaux calculs.

Soit en général l'équation $y = X^n$, X étant un polynome $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ qu'il faut élever à la puissance n; en différentiant cette équation, on a

$$dy = nX^{n-1}\,dX.$$

L'équation différentielle étant divisée par la proposée donne

$$\frac{dy}{y} = \frac{ndX}{X};$$

la puissance X^n ne se trouve pas dans cette dernière équation, ce qui la rend bien plus commode pour être développée par la méthode des coefficiens indéterminés.

Soit donc

$$y = A + Bx + cx^2 + Dx^3 + \ldots \&c.:$$

on aura

$$\frac{dy}{y} = \frac{(B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots)}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots}\,dx,$$

$$n\,\frac{dx}{x} = n\left\{\frac{b + 2cx + 3dx^2 + \ldots}{a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots}\right\}dx$$

Égalant entr'elles les valeurs de

$$\frac{dy}{y} \text{ et de } n\frac{dx}{x},$$

on a l'équation

$$\frac{B+2Cx+3Dx^2+\ldots}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots} = n\left\{\frac{b+2cx+3dx^2+\ldots}{a+bx+cx^2+dx^3}\right\};$$

faisant évanouir les fractions, et réunissant les termes affectés des mêmes puissances de x, on a

$$aB-nbA+\{2aC+bB-n(2cA+bB\}x$$
$$+\{3aB+2bc-n(3dA+2cB+bc\}x^2+\ldots=0.$$

Cette équation doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de x, donc on aura autant d'équations particulières qu'il y a de différentes puissances de x: on tirera de ces équations

$$B=\frac{nbA}{a}\ldots C=\frac{2ncA+(n-1)B}{2a}\ldots$$
$$D=\frac{3ndA+(2n-1)cB+(n-2)bC}{3a}.$$

Ces équations ne déterminent pas le premier coefficient A, mais pour le déterminer il faut avoir recours à l'équation première

$$(a+bx+cx^2+dx^3\ldots)^n=A+Bx+\ldots \text{ \&c.}$$

La forme du développement est indépendante de la valeur de x: elle aura donc lieu, quelle que soit cette valeur: si on suppose $x=0$, on a $a^n=A$: le premier terme de développement sera donc ainsi déterminé.

Application du calcul différentiel à la théorie des suites.

330. Soit une progression géométrique

$$ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots ax^n,$$

dont la somme est

$$\frac{ax^{n+1} - ax}{x-1} :$$

appelons cette somme s; en la différentiant on a

$$\frac{ds}{dx} = a + 2ax + 3ax^2 + 4ax^3 + \ldots + nax^{n-1} ;$$

et multipliant par x, on a

$$x\frac{ds}{dx} = ax + 2ax^2 + 3ax^3 + 4ax^4 + \ldots (1).$$

Ainsi connoissant la somme de tous les termes d'une progression géométrique

$$ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots ax^n ;$$

on aura facilement celle de la série résultante du produit des deux suivantes:

$$ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + ax^5 + \ldots . ax^n.$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots . n$$

Différentions l'équation (1), et nous aurons

$$\frac{ds}{dx} + x\frac{d^2s}{dx^2} = a + 4ax + 9ax^2 + 16ax^3 + \ldots n^2x^{n-1}.$$

et multipliant par x,

$$x\frac{ds}{dx} + x^2\frac{d^2s}{dx^2} = ax + 4ax^2 + 9ax^3 + 16ax^4 + \ldots n^2ax^n \ldots \ldots : (2)$$

Différentions cette dernière équation, et multiplions les deux membres de l'équation différentielle par x : on aura

$$x\frac{ds}{dx} + 3x^2\frac{d^2s}{dx^2} + x^3\frac{d^3s}{dx^3}$$
$$= ax + 8ax^2 + 27ax^3 + \ldots + n^3ax^n,$$

et ainsi des autres séries résultant du produit des termes d'une progression géométrique par les termes correspondans de la série des puissances des nombres naturels : on a la valeur de s, et il sera facile d'en déduire celle de $\frac{ds}{dx}$, ...&c.

On peut comparer les résultats obtenus par cette méthode avec ceux du n°. (269).

Application du calcul différentiel à la démonstration de plusieurs théorémes déjà vus sur les limites des racines des équations, et sur les caractères de la réalité de toutes leurs racines.

331. Soit l'équation générale

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + Tx + V = 0,$$

que nous représenterons pour abréger par $F.x = 0$: désignons par $a, b, c,$ les racines réelles de cette équation, soit qu'elles soient positives, soit qu'elles soient négatives : l'équation $Fx = 0$ pourra se mettre sous la forme suivante :

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots)fx = 0;$$

par fx, on entend le produit de toutes les racines imaginaires de l'équation $F.x$; lequel produit ne

pourra jamais devenir négatif, quelle valeur qu'on donne à x (11) : désignons par X le produit de toutes les racines réelles, en sorte que $F.x=Xf.x$: la différentielle de $F.x$, divisée par dx, est $F'.x$, ou la première fonction dérivée de $F.x$: et celle de $f.x$ sera, par la même raison, $f'.x$: on formera donc l'équation différentielle

$$F'x=\frac{dX}{dx}fx+Xf'.x:$$

or

$$\frac{dX}{dx}=(x-b)(x-c)\ldots+(x-a)(x-c)\ldots$$
$$+(x-a)(x-b)\ldots+\ldots\&c.,$$

et si on suppose que les racines a, b, c, sont rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus grande positive, et finissant par la plus grande négative, on verra facilement qu'en faisant $x=a$, $\frac{dX}{dx}$ se réduit au seul terme $(x-b)(x-c\ldots)$. Cette valeur est nécessairement positive, à cause de $a>b, >c\ldots$: si on fait ensuite $x=b$, $\frac{dX}{dx}$ se réduit au seul terme $(x-a)(x-c)\ldots$. : cette valeur est nécessairement négative, à cause de $b<a$, et $>c$: si on fait $x=c$, $\frac{dX}{dx}$ se réduit au seul terme $((x-a)(x-b)(x-d)\ldots.)$: cette valeur est nécessairement positive, à cause de $c<a, <b$, et $>d$, et ainsi des autres valeurs de $\frac{dX}{dx}$ qui se trouveront alternativement positives et négatives, en mettant successivement à la place de x les racines $d, g, \ldots$ &c. Quant au facteur X, il est visible que les suppos-

tions de $x, =a, =b, =c, \ldots$ &c. le rendront zéro; fx sera toujours positif; on aura donc les résultats suivans:

$x = a, \ldots$ donne $F'x$ positif,
$x = b, \ldots$ donne $F'x$ négatif,
$x = c, \ldots$ donne $F'x$ positif,
$x = d, \ldots$ donne F'. négatif,

.....

mais

$$F'.x = nx^{n-1} + n-1.px^{n-2} + n-2.Qx^{n-3} + n-3.Rx^{n-4} \ldots + 2sx + T,$$

donc l'équation différentielle $F'.x = 0$ aura nécessairement une racine réelle $< a$, et $> b$; elle en aura une seconde $< b$ et $> c$; elle en aura une troisième $< c$ et $> d$, et ainsi des autres..... (9)

Désignons les racines de l'équation $F'.x = 0$, par $a', b', c', d', \ldots$ il est visible qu'il y en aura une de moins que dans l'équation $Fx = 0$: si on suppose que les dernières sont rangées par ordre de grandeur, on prouvera comme pour les racines de l'équation $F.x = 0$, que la supposition de

$x = a'$ donne $\frac{d.F'.x}{dx}$, ou $F''.x$ positive,
$x = b'$ donne..... $F''.x$ négative,
$x = c'$ donne..... $F''.x$ positive,
$x = d'$ donne..... $F''.x$ négative.

.....

d'où il suit que l'équation $F''x = 0$,

ou $n.n-1\,x^{n-2} + n-1.n-2\,Px^{n-3} + n-2.n-3\,Qx^{n-4} + \ldots + 2s = 0$.

aura des racines réelles, dont la valeur tombera entre a' et b', entre b' et c', entre c' et d', &c.

Pour rendre ces observations plus sensibles, soit une courbe de genre parabolique, dont l'équation est

Fig. 70, n°. 1. $$y = x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + Tx + V = 0,$$

ou

$$y = Fx;$$

les points $B, C, D\ldots$ où la courbe coupe l'axe, sont ceux où l'ordonnée $= 0$, et par conséquent, les racines réelles de l'équation $Fx = 0$, sont données par les abscisses $AG, AF, AD, AB\ldots$ &c. Si on forme l'équation $F'x = 0$, en différentiant l'équation $Fx = 0$, on aura une équation d'un degré moindre d'une unité, dont les racines Af, Ad, Ab, Ac, indiqueront les abscisses qui répondent aux plus grandes ordonnées, ou aux points de la courbe, qui ont les tangentes parallèles à l'axe des abscisses (370), et il est visible que les racines tombent entre AG et AF; entre AF et AD; entre AD et AC; entre AC et AB.

n°. 2. Si l'on construit sur le même axe une nouvelle courbe, dont l'équation soit $z = F'x$, et dont les abscisses répondant aux ordonnées $= 0$, soient $af = Af\ldots ad = Ad\ldots ab = Ab\ldots ac = Ac$, et qu'on la différentie, en faisant

$$\frac{dx}{dx}, \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

on formera l'équation $F''x = 0$, dont les racines an, am, ar répondront aux plus grandes ordonnées, ou aux points de la courbe, n°. 2, qui ont les tangentes parallèles à l'axe; elles seront par conséquent entre af et ad; entre ad et ab, entre ab et ac....&c.

n°. 3. On peut construire sur le même axe une troi-

sième courbe, dont l'équation soit $u=F''.x$, et dont les abscisses, répondant aux ordonnées zéro, soient Pu, Pt, Ps, ... en la différentiant, et faisant $\frac{du}{dx}$, ou $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, on forme l'équation $F'''.x=0$, dont les racines seront données par les abscisses po, pt, répondant aux plus grandes ordonnées, ou aux points de la courbe qui ont les tangentes parallèles à l'axe, et l'on voit que les abscisses tomberont entre pu et pt; entre pt et ps... On tire des observations précédentes et de la construction de ces différentes courbes, plusieurs conséquences importantes dans la théorie générale des équations; nous allons présenter les principales.

Démonstration de la règle de Descartes.

332. Considérons les racines réelles de l'équation $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\ldots+V=0$, ou $F.x=0$, Fig. 70. et supposons qu'elle en ait un nombre p de positives et un nombre q de négatives; les positives seront données par les abscisses AG, AF, AD..., et les négatives par les abscisses AC, AB... Si on les classe par ordre de grandeur, on aura

$AG=a$, ... $AF=b$, $AD=c$, $AC=d$, $AB=f$...:

on aura ensuite les abscisses

$Af=a'$, $Ad=b'$, $Ab=c'$, $Ao=d'$... &c.

et les abscisses

$am=a''$, $am=b''$, $ar=c''$..... &c.

L'équation $F'x=0$, ou $\frac{dy}{dx}=0$, qui a une racine de moins que la proposée, aura nécessaire

ment $p-1$ racines réelles positives, $q-1$ racines réelles négatives, et de plus une racine réelle qui pourra être positive, comme Ab, ou négative, comme $A'b$, selon que l'axe des ordonnées Aa, se trouvera au-dessus ou au-dessous de l'ordonnée Bb du maximum : ainsi dans la courbe n°. 1, par exemple, si on prend la ligne Aa pour l'axe des ordonnées, on verra que l'équation $Fx=0$ a trois racines positives, et deux négatives, tandis que, l'équation $F'x=0$ qui appartient à la courbe n°. 2, n'aura que trois racines positives et une négative.

Si au contraire on prend la ligne $A'a'$ pour axe des ordonnées, l'équation $Fx=0$, qui appartient à la courbe n°. 1, aura toujours trois racines positives et deux négatives, tandis que l'équation $F'x=0$ n'aura que deux racines positives et deux négatives, d'où il suit que si l'équation $Fx=0$, a plus de racines positives que l'équation $F'x=0$, elle ne peut en avoir qu'une de plus; ainsi elle a plus de racines négatives, elle ne peut en avoir qu'une de plus.

Si le nombre des racines positives de l'équation $Fx=0$ est pair, son dernier terme V sera positif; car le produit de toutes les racines négatives est toujours positif : si le nombre des racines positives est pair, leur produit sera positif, d'après la règle des signes dans la multiplication; or un produit positif multiplié par un autre produit positif, donne un produit positif; donc le dernier terme V sera positif. Si au contraire le nombre des racines positives de l'équation $F.x=0$ est impair, le dernier terme de l'équation sera négatif.

Pareillement si le nombre des racines positives de l'équation $F'.x=0$ est pair, son dernier terme est positif, et si le nombre des racines positives de

impair, le dernier terme est négatif, d'où il suit que si l'équation $F.'x = 0$ a une racine positive de moins que l'équation $F.x = 0$, le dernier terme de la première n'aura pas le même signe que celui de la dernière : si c'est au contraire une racine négative que $F.'x = 0$ a de moins que $Fx = 0$, les derniers termes des deux équations auront le même signe.

Le dernier terme de l'équation $F.x = 0$ est V, et celui de $F.'x = 0$ est T, coefficient de l'avant-dernier terme de la proposée : donc $F.x = 0$ ne peut avoir une racine positive de plus que $F.'x = 0$, qu'autant que T sera de différent signe que V, et elle ne peut avoir une racine négative de plus, qu'autant que T sera du même signe que V.

Le dernier terme de l'équation $F.''x = 0$ est $2S$, et l'on prouvera par un raisonnement semblable au précédent, que $F.'x = 0$ ne peut pas avoir une racine positive de plus que $F.''x = 0$, qu'autant que $2S$ sera d'un signe contraire à celui de T, et elle ne peut pas avoir une racine négative de plus, qu'autant que $2S$ et T seront de même signe : on en dira autant de $F.''x = 0$ par rapport à $F'''x = 0$, et ainsi des autres : si on différentie l'équation $Fx = 0$; $n-1$ fois, on aura les n équations $Fx = 0 \ldots F.'x = 0 \ldots F.''x = 0 \ldots F'''.x = 0 \ldots F^{(n-1)}x = 0$: et il est visible que

$F^{(n-1)}.x = 0$ se réduit à $x + \frac{P}{n} = 0$.

$F^{(n-2)}.x = 0$ se réduit à $x + \frac{2P}{n}x + \frac{2Q}{n.n-1}$.

$F^{(n-3)}.x = 0$ se réduit à.....

Ainsi le dernier terme de $F^{(n-1)}.x = 0$ est

$$\frac{P}{n} \ldots .$$

le dernier terme de $F^{(n-3)}.x = 0$ est

$$\frac{2Q}{n.n-1};$$

celui de $F^{(n-3)}.x = 0$ est

$$\frac{3.2R}{n.n-1.n-2},$$

celui de $F''.x = 0$ est

$$\frac{2S}{n.n-1},$$

celui de $F'.x = 0$ est $\frac{T}{n}$,

et celui de $F.x = 0$ est V:

donc la première de ces équations ne pourra avoir sa racine positive ou négative qu'autant que $\frac{P}{n}$, ou P simplement sera négatif ou positif: la seconde n'aura une racine positive ou négative de plus que la première qu'autant que Q sera de différent ou de même signe que P: la troisième n'aura une racine positive ou négative de plus que la seconde qu'autant que R sera de différent signe ou de même signe que Q, et enfin $F.x = 0$ n'aura une racine positive ou négative de plus que $F'.x = 0$, qu'autant que V sera de différent ou de même signe que T... d'où il suit que si toutes les racines de la proposée sont réelles et que P soit négatif, l'équation $F^{(n-1)}.x = 0$ aura sa racine positive: si P étant négatif, Q est positif, l'équation $F^{n-2}.x = 0$ aura ses deux racines positives: si on a de plus R négatif, les trois racines de l'équation $F^{n-3}.x = 0$ seront positives... En continuant ainsi jusqu'à $F.x = 0$, on verra que

pour que toutes ses racines soient positives, il faut que tous les coefficiens soient alternativement positifs et négatifs.

On verra par un raisonnement semblable, que si P est positif, l'équation $F^{s-1}.x = 0$ a sa racine négative: si P et Q sont positifs, l'équation $F^{(s-2)}x = 0$ aura les deux racines négatives : si P et Q étant positifs on a encore R positif, $F^{(s-3)}.x = 0$ aura ses trois racines négatives... En continuant ainsi jusqu'à $F.x = 0$, on verra que si tous les coefficiens sont tous positifs, elle aura toutes ses racines négatives; d'où il suit que lorsque dans les signes des termes de l'équation $F.x = 0$ il n'y aura que des variations, toutes ses racines seront positives; et lorsqu'il n'y aura que des permanences, elles seront toutes négatives.

En général, si deux coefficiens consécutifs Q, R, qu'on peut regarder comme les derniers termes de deux équations différentielles consécutives $F^{(m+1)}.x = 0 \ldots F^{(m)}.x = 0$ sont de même signe, l'équation $F.^{(m)}.x = 0$ aura une racine négative de plus que $F^{(m+1)}.x = 0$; et si les deux coefficiens consécutifs ont des signes différens, la première des deux équations aura une racine positive de plus que la seconde; ainsi en passant d'une équation différentielle à l'autre, on ne fait évanouir qu'une seule racine positive en faisant évanouir une variation, ou une seule racine négative en faisant évanouir une permanence; donc réciproquement, en revenant de la dernière équation différentielle à la première, on n'introduira qu'une seule racine positive en introduisant une variation, ou une seule racine négative en introduisant une permanence. Donc la proposée ne pourra pas avoir plus de racines positives que de variations, ni plus de racines négatives que de permanences.

333. Si l'équation $Fx = 0$ a toutes ses racines réelles, l'équation différentielle $F'.x = 0$ aura aussi toutes les siennes réelles; puisque entre deux racines réelles consécutives de l'équation $Fx = 0$, il tombe toujours une racine réelle de l'équation $F'.x = 0$; c'est-à-dire qu'entre les deux abscisses AG, AF répondant à $y = 0$, on trouve l'abscisse Af répondant à un maximum d'ordonnées. Par la même raison la seconde équation différentielle $F''.x = 0$ aura toutes ses racines réelles, si $F'.x = 0$ a les siennes réelles; c'est-à-dire que dans la courbe n°. 2, entre les abscisses af, ad, on trouve l'abscisse an, répondant à un maximum d'ordonnée.

Fig. 70, n°. 1.

On prouvera de la même manière que si $F''.x = 0$ a toutes ses racines réelles, $F'''.x = 0$ a aussi les siennes réelles et ainsi des autres; d'où il suit qu'en différentiant l'équation $F.x = 0$ $n - 2$ fois, on aura l'équation du second degré

$$x^2 + \frac{2P}{n}x + \frac{2Q}{n.n-1} = 0:$$

la proposée aura toutes ses racines réelles si celles de l'équation du second degré sont réelles; et si les deux racines de l'équation du second degré sont imaginaires, c'est un indice que la proposée a des racines imaginaires.

Soit pour exemple l'équation

$$x^3 + px + q = 0:$$

en la différentiant, on a

$$3x^2 + p = 0:$$

or cette équation du second degré a nécessairement ses deux racines imaginaires; donc l'équation

proposée du troisième degré a deux racines imaginaires (49).

Il suit encore des observations précédentes, que si une équation manque d'un terme quelconque, elle aura des racines imaginaires si les deux termes voisins de celui qui manque ont le même signe.

Pour abréger la démonstration, prenons l'équation du quatrième degré

$$x^4+px^3+qx+r=0,$$

qui manque du troisième terme : en la différentiant une fois, on fait disparoître le dernier terme, et l'on a l'équation du troisième degré

$$4x^3+3px^2+q=0,$$

qui a toutes ses racines réelles si celles de la proposée le sont. Si on fait $x=\frac{1}{z}$, on changera l'équation du troisième degré en sa réciproque

$$qz^3+3pz+4=0;$$

en la différentiant, on a

$$3qz^2+3p=0:$$

or il est visible que les deux racines de cette équation sont imaginaires, parce que les deux coefficiens p, q, ont le même signe, donc la proposée aura aussi des racines imaginaires.

L'inverse de la proposition que nous venons de prouver n'est pas généralement vraie ; c'est-à-dire que si, réciproquement, l'équation $F'.x=0$ a toutes ses racines réelles, il ne s'ensuit pas que la proposée ait toutes les siennes réelles ; pour s'en convaincre, il suffit de jeter les yeux sur la fig. 70, n°. 4, qui est la construction géométrique d'une équation du sixième degré ayant deux racines Fig. 70, n°. 4.

réelles et quatre imaginaires : on y verra que quoique la courbe dont l'équation est

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4 + gx^5 + hx^6,$$

ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points B et C, qui désignent les racines réelles de l'équation $F.x = 0$; l'équation $\frac{dy}{dx}$ peut avoir cinq racines réelles indiquant les abscisses correspondantes aux points de la courbe, où les tangentes sont parallèles à l'axe.

Méthode pour déterminer les racines égales d'une équation.

334. On a vu (27) que pour déterminer les racines doubles d'une équation représentée par

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + V = 0,$$

il falloit former l'équation $N = 0$... pour avoir les racines triples, il falloit former encore l'équation $M = 0$... et ainsi des autres, et chercher ensuite le commun diviseur entre l'équation donnée et les différentes équations de condition. Maintenant on peut remarquer que l'équation $N = 0$ n'est autre chose que la différentielle de la proposée, et l'équation $M = 0$ est la différentielle de $N = 0$ ou la différentielle seconde de la proposée; on formera donc facilement ces équations de condition par les règles de la différentiation.

On démontrera aussi avec la même facilité que le diviseur commun entre la proposée $N = 0$ contient les racines égales de la proposée, mais élevées à une puissance d'un degré moindre d'une unité que dans la proposée.

Supposons pour cela que la proposée est

$$(x-a)^r \times (x-b)^s \times fx = 0 \text{ (30)};$$

on aura, en différentiant,

$$r(x-a)^{r-1} \times (x-b)^s \times fx + s.(x-a)^r \times (x-b)^{s-1} \times fx + (x-a)^r \times (x-b)^s \times f'x = 0:$$

le diviseur commun entre cette équation différentielle et la proposée est

$$(x-a)^{r-1} \times (x-b)^{s-1};$$

or les racines égales que le diviseur contient sont élevées à une puissance d'un degré moindre d'une unité que dans la proposée; donc, &c.

Si l'on prenoit la différentielle de la dernière équation, on verroit que son diviseur commun avec la proposée et la différentielle première est

$$(x-a)^{r-2} \times (x-b)^{s-2};$$

d'où on peut conclure que si on représente par $X = 0$ l'équation proposée, les équations de condition pour qu'elle ait des racines égales sont

$$\frac{dX}{dx} = 0 \ldots \frac{d^2X}{dx^2} = 0 \ldots \frac{d^3X}{dx^3} = 0 \ldots \&c.$$

ou ce qui revient au même, si l'on représente l'équation proposée par $F.x = 0$, les équations de condition seront

$$F'.x = 0 \ldots F''.x = 0 \ldots F'''.x = 0 \ldots \&c.$$

On cherche ensuite le commun diviseur entre $F.x = 0$ et ses dérivées.

Application du calcul différentiel aux méthodes d'approximation.

335. Le calcul différentiel facilite l'application des méthodes ordinaires pour trouver des valeurs de plus en plus approchées des racines d'une équation ; supposons que l'on ait l'équation $X=0$ dont on connoît déjà une valeur approchée de la racine cherchée : désignons par a cette valeur approchée, et par p la quantité très-petite qu'il faut ajouter à a pour avoir la racine exacte : si on substitue $a+p$, ou $x+p$ à la place de x dans l'équation $X=0$, elle deviendra

$$X+p\frac{dX}{dx}+\frac{p^2}{2}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{p^3}{2.3}\frac{d^3X}{dx^3}+\ldots\&c.=0,$$

ayant le soin de mettre a à la place de x après la différentiation ; mais par la supposition p est une quantité très-petite : on pourra donc négliger les termes où elle est élevée à la seconde puissance et aux puissances supérieures. On aura ainsi

$$X+p\frac{dX}{dx}=0;$$

d'où on aura facilement une valeur approchée de p. Soit b cette première valeur approchée ; on aura

$$x=a+b+q,$$

q étant une quantité très-petite : mettant cette valeur à la place de x dans l'équation $X=0$, ou ce qui est plus simple, mettant q à la place de p, et $a+b$ à la place de x dans la première transformée $X+p\frac{dX}{dx}=0$, on aura une seconde transformée

de laquelle on tirera la valeur de q; en continuant d'opérer de la même manière, on trouvera des valeurs de x de plus en plus approchées.

Exemple. Soit l'équation

$$x^3+2x^2+3x-50=0\ (63),$$

dont on a déjà une racine approchée $2,5\ldots$ On fera $a=2,5$ dans la première transformée, et l'on aura

$$X=(2,5)^3+2(2,5)^2+3(2,5)-50$$

$$\frac{dX}{dx}=3(2,5)^2+4(2,5)+3\ldots$$

donc la transformée donnera

$$p=\frac{50-3(2,5)-2(2,5)^2-(2,5)^3}{3(2,5)^2+4(2,5)+3}$$

$$=\frac{14,375}{31,75}=0,45.$$

On peut aussi se servir du même procédé pour avoir les différentes transformées, quand on cherche les valeurs approchées, par la méthode de Lagrange.

Soit l'équation $X=0$,

ou

$$Nx^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+Rx^{n-3}+\ldots V=0\ (66):$$

supposons qu'on ait déjà trouvé la valeur de x la plus approchée en nombres entiers: soit cette première valeur $=a$, on fera

$$x=a+\frac{1}{y},$$

et l'on aura la transformée

$$X+\frac{1}{y}\frac{dX}{dx}+\frac{1}{2.y2}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{2.3y^3}\frac{d^3X}{dx^3}+\ldots=0,$$

dans laquelle on mettra la quantité a à la place de x, et multipliant toute l'équation par y^n, on aura la transformée

$$Xy^n+\frac{dX}{dx}y^{n-1}+\frac{d^2X}{2.dx^2}y^{n-2}+\frac{d^3X}{2.3dx^3}y^{n-3}+\ldots=0;$$

dans cette transformée on a

$$X=Na^n+Pa^{n-1}+Qa^{n-2}+Ra^{n-3}+\ldots V.$$

$$\frac{dX}{dx}=nNa^{n-1}+n-1.Pa^{n-2}+n-2.Qa^{n-3}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{n.n-1}{2}Na^{n-2}+\frac{n-1.n-2}{2}Pa^{n-3}+\ldots$$

$$\frac{1}{2.3}\frac{d^3X}{dx^3}=\frac{n.n-1.n-2}{2.3}Na^{n-3}+\frac{n-1.n-2.n-3}{2.3}P.a^{n-4}\ldots$$

Exemple. Prenons l'équation

$$x^3-x^2-2x+1=0\ (66)$$

dans laquelle la valeur entière de x est 1 : on a donc

$a=1, N=1\ldots P=-1, Q=-2, \ldots R=1\ldots$

et

$$X=-1\ldots\ \frac{dX}{dx}=-1\ldots\frac{d^2X}{2dx^2}=+2\ldots\frac{d^3X}{2.3d.x^3}=+1;$$

donc la première transformée sera

$$-y^3-y^2+2y+1=0,$$

ou en changeant les signes,

$$y^3+y^2-2y-1=0.$$

Théorème relatif à la somme des puissances des racines d'une équation.

336. Soit l'équation

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + V = 0 :$$

en faisant $x = \frac{1}{y}$, on formera l'équation identique

$$1 + Py + Qy^2 + Ry^3 + \ldots + Vy^n$$
$$= (1-ay)(1-by)(1-cy)(1-dy)\ldots = 0 \text{ (24)},$$

d'où résulte, en prenant la différentielle logarithmique des deux membres, cette autre équation, pareillement identique :

$$\frac{-P - 2Qy - 3Ry^2 - \ldots . nVy^{n-1}}{1 + Py + Qy^2 + Ry^3 + \ldots . + V^n}$$
$$= \frac{a}{1-ay} + \frac{b}{1-by} + \frac{c}{1-cy} + \frac{d}{1-dy} + \ldots$$

Soit

$$B + Cy + Dy^2 + Fy^3 + \ldots + My^{n-1} + Ny^n \ldots \text{etc.}$$

la série qui vient du développement du premier membre ; en continuant le calcul, comme dans le n°. (24), on trouvera

$$B = a + b + c + d + \ldots .$$
$$C = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots .$$
$$D = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \ldots \ldots$$
$$M = a^n + b^n + c^n + d^n + \ldots .$$

et l'on déterminera M, ou fn par la formule connue d'après la loi des suites récurrentes

$$fn + Pfn-1 + Qfn-2 + Rfn-3 + \ldots + nV = 0.$$

De cette manière on ne peut trouver la valeur de $f.n$ qu'à l'aide des sommes $f.n-1$, $f.n-2$... etc. Nous allons indiquer un moyen de trouver la somme des racines d'une équation quelconque, élevées à telle puissance qu'on voudra, sans avoir besoin de connoître les sommes des mêmes racines élevées aux puissances inférieures. C'est le problème que nous avons annoncé (25).

337. Reprenons l'équation

$$\frac{-P-2Qy-3Ry^2\ldots-nVy^{n-1}}{1+Py+Qy^2+Ry^3+\ldots-Vy^n}=B+Cy+Dy^2+\ldots+My^{n-1}.$$

Si on multiplie les deux membres de cette équation par dy, le numérateur du premier membre sera la différentielle du dénominateur prise négativement ; faisons

$$Py+Qy^2+Ry^3+\ldots Vy^n=Y;$$

on aura ainsi

$$\frac{dY}{1+Y}=B\,dy+Cy\,dy+Dy^2dy+\ldots My^{n-1}dy;$$

car dY est aussi bien la différentielle de Y, que de $1+Y$: si on développe $1+Y$ en série, et qu'on multiplie tous les termes du développement par $-dY$, on aura

$$-dY+YdY-Y^2dY+Y^3dY-Y^4dY+-\ldots\pm Y^{n-1}dY=Bdy+Cy^2dy+Dy^3dy+\ldots+My^{n-1}dy:$$

cette équation est la différentielle de la suivante,

$$-Y+\frac{Y^2}{2}-\frac{Y^3}{3}+\frac{Y^4}{4}-\frac{Y^5}{5}+-\ldots\pm\frac{Y^n}{n}=By+\frac{Cy^2}{2}+\frac{Dy^3}{3}+\ldots+\frac{My^n}{n},$$

Comme on peut s'en assurer en différentiant cette dernière, on remarquera que les puissances d'un degré pair de Y sont positives, et celles d'un degré impair sont négatives.

Comme la valeur des coefficiens $B, C, D \ldots M$ est indépendante de y, il s'ensuit que pour déterminer les coefficients, il faut égaler entr'eux les termes homogènes des deux membres : ainsi la valeur du coefficient M du second membre est égale à tout ce qui multiplie y^n dans le premier membre : pour le déterminer, il faudra développer les fonctions $Y, Y^2, Y^3, \ldots Y^n$, et ne retenir de chaque développement que les termes qui multiplient y^n.

En mettant Y sous cette forme

$$y(P + Qy + Ry^2 + \ldots Vy^{n-1});$$

on verra facilement, 1°. que le seul terme de Y^n qui soit multiplié par y^n, est P^n.

2°. Que pour avoir les termes de Y^{n-1} qui sont multipliés par y^n, il suffit de connoître les termes du développement de

$$(P + Qy + Ry^2 + \ldots Vy^{n-1})^{n-1},$$

qui sont multipliés par y, parce que

$$Y^{n-1} = y^{n-1}(P + Qy + Ry^2 + \ldots Vy^{n-1})^{n-1};$$

et l'on voit évidemment que les termes du développement qui contiennent y, se trouveront multipliés par y^n, à cause du facteur y^{n-1} qui multiplie tous les termes.

3°. Que pour avoir les termes de Y^{n-2}, multipliés par y^n, il suffit de connoître ceux du développement $(P + Qy + Ry^2 + \ldots Vy^{n-1})^{n-2}$ qui contiennent y^2.... et ainsi des autres termes.

Pour effectuer les développemens, j'ai recours à la formule

$$f.y=f+y\frac{df}{dy}+\frac{y^2}{2}\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{y^3}{2.3}\frac{d^3f}{dy^3}+\ldots\ldots\frac{1\,y^n}{2.3.4\ldots n}\frac{d^nf}{dy^n}\quad(294)$$

dans laquelle f désigne ce que devient

$$P+Qy+Ry^2+\ldots+Vy^{n-1}$$

lorsque $y=0$, $\frac{df}{dy}$ marque ce que devient le premier coefficient différentiel de $f.y$, lorsque $y=0$, $\frac{d^2f}{dy^2}$ représente ce que devient le second coefficient différentiel de $f.y$, lorsque $y=0\ldots$ etc.

Soit fait pour abréger

$$P+Qy+Ry^2+\ldots Vy^{n-1}=\varphi,$$

en sorte que $Y=y\times\varphi$: on aura, d'après les considérations précédentes,

$$\frac{M}{n}=\pm\frac{\varphi^n}{n}\mp\frac{d.\varphi^{n-1}}{dy\times n-1}\pm\frac{d^2.\varphi^{n-2}}{dy^2.2\times n-2}$$
$$\mp\frac{d^3.\varphi^{n-3}}{dy^3.2.3.\times n-3}\ldots\ldots\pm\frac{d^n.\varphi}{2.3.4\ldots n}.$$

en observant de faire $y=0$ dans tous les termes de cette formule après avoir effectué les différentiations indiquées.

Pour faciliter les substitutions, on remarquera qu'en faisant $y=0$,

1°. φ se réduit à P;

2°. $\frac{d\varphi}{dy}$ se réduit à Q;

3°. $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ se réduit à $2R$:

4°. $\frac{d^3\varphi}{dy^3}$ se réduit à $3 . 2S$:

5°. $\frac{d^4\varphi}{dy^4}$ se réduit à $. 4 , 3 . 2T$,

6°. . . . . .

ainsi on aura

$$\frac{\varphi^n}{n} = \frac{P^n}{n}$$

$$\frac{d . \varphi^{n-1}}{dy . n-1} = \varphi^{n-2} \frac{d\varphi}{dy} = P^{n-2} . Q$$

$$\frac{d^2 . \varphi^{n-2}}{dy^2 . 2 \times n-2} = \frac{n-3}{2} \varphi^{n-4} \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{\varphi^{n-3}}{2} \frac{d^2\varphi}{dy^2}$$

$$= \frac{n-3}{2} P^{n-4} Q^2 + P^{n-3} . R$$

$$\frac{d^3 . \varphi^{n-3}}{dy^3 2 . 3 \times n-3} = \frac{n-4 . n-5}{2 . 3} \varphi^{n-6} \frac{d\varphi^3}{dy^3}$$

$$+ \frac{3 . n-4}{2 . 3} \varphi^{n-5} \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{\varphi^{n-4} d^3\varphi}{2 . 3 dy^3}$$

$$= \frac{n-4 . n-5}{2 . 3} P^{n-6} Q^3 +$$

$$n-4 P^{n-5} Q R + P^{n-4} S . \text{ etc.}$$

. . . . . .

Appliquons ces formules à quelques exemples. Soit l'équation

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0 ,$$

et cherchons, 1°. la somme des racines, 2°. la somme des quarrés des mêmes racines ; 3°. la

somme des cubes, 4°. la somme des quatrièmes puissances....etc. des racines de cette équation.

En mettant $\frac{1}{y}$ à la place de x, on aura

$$\varphi = p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 + uy^5 :$$

ainsi lorsque $n = 1$, on a par les formules ci-dessus, $\int 1 = -p$.

Lorsque $n = 2$, on a $\frac{\int . 2}{2} = \frac{p^2}{2} - q$; et $\int 2 = p^2 - 2q$.

Lorsque $n = 3$, on a $\frac{\int . 3}{3} = -\frac{p^3}{3} + p^2 q - r$;

et $$\int 3 = -p^3 + 3pq - 3r.$$

Lorsque $n = 4$, on a $\frac{\int^4}{4} = \frac{p^4}{4} - p^2 q + pr + \frac{q^2}{2} - s$;

et $\int 4 = p^4 - 4p^2 q + 4pr + 2q^2 - 4s$, etc....

ce qui est bien conforme à ce que l'on a trouvé (26).

Soit l'équation du second degré $x^2 + px + q = 0$. dont on demande la somme des puissances m des deux racines $a^m + b^m$; on fera d'abord $x = \frac{1}{y}$, et l'on aura l'équation $1 + py + qy^2 = 0$, et par conséquent $\varphi = p + qy$, $\frac{d\varphi}{dy} = q$, et toutes les autres différentielles — égales à zéro : on aura donc

$$a^m + b^m = \pm p^m \mp m q p^{m-2} \pm \frac{m . m-3}{2} q^2 p^{m-4}$$

$$\mp \frac{m . m-4 . m-5}{2 . 3} q^3 p^{m-6} + \ldots \text{etc.}$$

Cette

Cette série devant être continuée jusqu'à ce que l'on parvienne à des puissances négatives de p, le signe supérieur de chaque terme ayant lieu lorsque m est un nombre pair; et le signe inférieur, lorsque m est impair. (*Voyez* Lagrange, Résolution des équations numériques, page 243.) (1)

Méthode pour déterminer par le calcul différentiel la valeur d'une fraction $\frac{X}{X'}$, *lorsque pour une valeur particulière de* x *le numérateur et le dénominateur deviennent zéro chacun séparément.*

338. On trouve souvent dans l'analyse des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions de la même variable x, telles qu'en donnant à x une valeur déterminée la fraction devient $\frac{0}{0}$. On a vu (321) que ces sortes de fractions

(1) Cet article étoit terminé depuis long-temps, et l'ouvrage déjà envoyé à l'impression (en frimaire an 9); lorsque j'ai reçu le Calcul des Dérivations d'Arbogast. En parcourant rapidement le premier article, je me suis convaincu que sa formule n°. 26, page 13, même le même résultat que celle que j'ai trouvée en suivant une route différente: l'auteur avoit bien voulu me communiquer verbalement en l'an 3 le plan de son ouvrage. Je regrette beaucoup qu'il ne me soit pas parvenu plutôt; il m'auroit fourni plus d'une occasion de faire des rapprochemens semblables à celui de l'article précédent, pour prouver l'analogie qui existe entre le Calcul des Dérivations et le Calcul Différentiel: quoique le temps et mes occupations ne m'aient pas permis de l'étudier encore, je le crois digne d'intéresser les Géomètres, tant par son sujet et la manière dont il est traité, que par les talens et le mérite de l'auteur.

se présentent souvent dans la détermination des tangentes, et qu'elles supposent l'existence d'un point double ou multiple, répondant à la valeur déterminée de l'abscisse qui rend zéro le numérateur et le dénominateur de la fraction ; mais rien n'empêche de considérer toute fraction dont le numérateur et le dénominateur est une fonction de x, comme exprimant la valeur de $\frac{dy}{dx}$, et par conséquent comme déterminant la position de la tangente à un point quelconque d'une courbe donnée : ainsi lorsqu'on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0},$$

on peut supposer qu'il est question de déterminer la position de la tangente à un point double ; et comme à un pareil point il y a deux tangentes ayant différentes directions, le rapport $\frac{dy}{dx}$ ne pouvant en donner qu'une et ne devant pas en donner une plutôt que l'autre, reste vague et indéterminé, et ne peut être déterminé que par une équation du second degré s'il est question d'un point double, ou par une équation du troisième degré si c'est un point triple. Ces considérations supposent que les termes de la fraction sont des fonctions implicites de x et y ; mais il est aisé de voir qu'elles s'appliquent également aux fonctions qui ne renferment qu'une variable ; dans ces cas particuliers, la différentielle de l'équation $M dx + N dy = 0$ ne contiendra pas le carré de $\frac{dy}{dx}$, parce que M et N ne contiennent que la variable x.

Soit donc $\frac{X}{X'}$, une pareille fraction X, et X' étant des fonctions de x telles que la supposition de $x = a$ les rende toutes les deux zéro : on fera

$$y = \frac{X}{X'}, \text{ ou } y\,X' = X:$$

la supposition de $x = a$ rend les deux membres zéro, l'on a par conséquent $0 = 0$, quelle que soit la valeur de y qui demeure indéterminée; mais si on différentie cette équation, on a

$$y\,dX' + X'\,dy = dX;$$

et comme la supposition de $x = a$ rend $X' = 0$, le terme $X'\,dy$ disparoît de lui-même par cette supposition, et l'on a

$$y\,dX' = dX, \text{ ou } y = \frac{dX}{dX'}.$$

Exemple premier. Soit la fraction

$$y = \frac{a^2 - x^2}{a - x},$$

dont on cherche la valeur lorsque $x = a$: il est visible que l'on a dans cette supposition

$$y = \frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0};$$

mais si on différentie séparément le numérateur et le dénominateur, on a

$$y = \frac{-2\,dx}{-dx} = 2x = 2a,$$

lorsque $x = a$, ce qui est la véritable valeur de y;

en effet, en décomposant le numérateur en ses facteurs, on a

$$y=\frac{(a+x)(a-x)}{a-x}=a+x=2a,$$

lorsque $x=a$.

Exemple second. Soit

$$y=\frac{ax^2-a}{x-1},$$

dont on demande la valeur lorsque $x=1$... on a dans cette hypothèse

$$y=\frac{a-a}{1-1}=\frac{0}{0};$$

mais en différentiant séparément le numérateur et le dénominateur, on a

$$y=\frac{anx^{n-1}dx}{dx}=an,$$

lorsque $x=1$.

Exemple troisième. Soit

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)},$$

dont on cherche la valeur, lorsque $x=0$; on a

$$y=\frac{0}{0};$$

si on différentie séparément le numérateur et le dénominateur, on a

$$y=(e^x+e^{-x})(1+x)=2,$$

lorsque $x=0$.

Exemple quatrième. Soit

$$y=\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1},$$

dont on cherche la valeur lorsque $x = 90^d$; on a dans cette supposition,

$$y = \frac{0}{0};$$

mais en différentiant séparément le numérateur et le dénominateur, on a

$$y = \frac{-\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} = +1;$$

lorsque $x = 90^d$.

Il arrive quelquefois que la valeur de x qui rend la fraction $\frac{X}{X'} = \frac{0}{0}$ rend aussi $\frac{dX}{dX'} = \frac{0}{0}$; alors on passe à la différentielle seconde ou à la différentielle troisième, en ayant soin de prendre séparément la différentielle du numérateur et du dénominateur.

Exemple. Soit l'équation

$$y = \frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2},$$

dont on demande la valeur lorsque $x = c$. Il est visible que dans cette supposition $y = \frac{0}{0}$: si on différentie séparément le numérateur et le dénominateur, on a

$$y = \frac{2ax - 2ac}{2bx - 2bc} = \frac{0}{0},$$

lorsque $x = c$. Différentiant de nouveau, on a

$$y = \frac{a}{b},$$

qui est la véritable valeur de la fraction, comme

on peut s'en assurer par la décomposition; car on a

$$y=\left(\frac{x^2-2cx+c^2}{x^2-2cx+c^2}\right)\frac{a}{b}=\frac{a}{b},$$

quelle que soit la valeur de x.

Usages du calcul différentiel pour résoudre une fraction rationnelle algébrique en fractions simples.

339. Soit une fraction rationnelle quelconque, dont le dénominateur peut se décomposer en facteurs simples de la forme $m+nx$; représentons-la par $\frac{P}{Q}$, P et Q étant des fonctions rationnelles de x : faisons $Q=(m+nx)S$, $m+nx$ étant un facteur simple du dénominateur, et S le produit de tous les autres facteurs du dénominateur.

On pourra supposer

$$\frac{P}{Q}=\frac{A}{m+nx}+\frac{R}{S}\ (Algèb.\ 127);$$

et mettant pour Q sa valeur $(m+nx)S$, on a

$$\frac{P}{(m+nx)S}=\frac{A}{m+nx}+\frac{R}{S},$$

d'où on tire en réduisant les deux fractions au même dénominateur,

$$R=\frac{P-AS}{m+nx};$$

mais R est une fonction rationnelle et entière, donc $P-AS$ doit être divisible par $m+nx$; d'où il suit que si on fait

$$m+nx=0,$$

on doit avoir

$$P - AS = 0;$$

et par conséquent A est égal à ce que devient $\frac{P}{S}$, lorsqu'on fait $x = -\frac{m}{n}$; mais puisque $S = \frac{Q}{m+nx}$, en mettant cette valeur de S dans la valeur de A, on aura A égal à ce que devient $\frac{P.m+nx}{Q}$, lorsqu'on fait

$$m+nx = 0:$$

or dans cette hypothèse le numérateur $P.(m+nx)$ et le dénominateur de la fraction deviennent zéro l'un et l'autre; la valeur de A se présente donc sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; on aura donc recours à la méthode précédente, et l'on trouvera

$$A = \frac{(m+nx)dP + nPdx}{dQ} = \frac{nPdx}{dQ},$$

à cause de la supposition de $m+nx = 0$.

Exemple. Soit proposée la fraction

$$\frac{a}{a^2x - x^3} (Algèb. 127) = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{C}{a-x};$$

pour déterminer A, on a

$$m = 0, n = 1, P = a, Q = a^2x - x^3;$$

donc

$$A = \frac{a}{a^2 - 3x^2};$$

et faisant $x = 0$, on a

$$A = \frac{1}{a}:$$

pour déterminer B, on a le facteur

$$a+x=0,$$

par conséquent

$$m=a,\ n=1\ldots\ dQ=(a^2-3x^2)\,dx;$$

donc $$B=\frac{a}{a^2-3x^2},$$

et en faisant $x=-a$, on a

$$B=-\frac{1}{2a}.$$

Pour connoître C, on a

$$a-x=0,$$

donc

$$m=a,\ n=-1;\ \text{et}\ C=\frac{-a}{a^2-3x^2};$$

et en faisant $x=a$, on a

$$C=\frac{1}{2a}.$$

340. On déterminera de cette manière les numérateurs de toutes les fractions simples ayant pour dénominateur un des facteurs simples qui entrent dans la valeur de Q; mais si outre ces facteurs simples le dénominateur Q contenoit des facteurs doubles ou multiples tels que $(p+qx)^r$, pour déterminer les numérateurs des fractions partielles ayant pour dénominateur ces facteurs multiples, on fera

$$\frac{P}{Q}=\frac{M}{(p+qx)^r}+\frac{R}{S};$$

quant à la fraction $\frac{M}{(p+qx)^r}$, on la mettra sous la forme suivante :

$$\frac{A}{(p+qx)^r}+\frac{B}{(p+qx)^{r-1}}+\frac{C}{(p+qx)^{r-2}}$$
$$+\frac{D}{(p+qx)^{r-3}}+\ldots+\frac{K}{p+qx};$$

$A, B, C, D \ldots K$ étant des coefficiens constans : pour se convaincre de la possibilité de cette dernière transformation, il suffit de considérer que la plus grande puissance de x dans le dénominateur de la fraction $\frac{M}{(p+qx)^r}$, étant r son numérateur, M peut avoir la forme

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots+kx^{r-1};$$

on aura donc l'équation

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots lx^{r-1}}{(p+qx)^r}$$
$$=\frac{A}{(p+qx)^r}+\frac{B}{(p+qx)^{r-1}}+\frac{C}{(p+qx)^{r-2}}+\ldots+\frac{k}{p+qx};$$

réduisant au même dénominateur, on a

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots lx^{r-1}$$
$$=A+B(p+qx)+C(p+qx)^2+D(p+qx)^3+\ldots K(p+qx)^{r-1};$$

si on développe tous ces binomes, et qu'on compare entr'eux les coefficiens des mêmes puissances de x dans les deux membres, on aura autant d'équations du premier degré que de coefficiens indéterminés ; on pourra donc déterminer $A, B, C, D \ldots K$, de manière que la fraction $\frac{M}{(p+qx)^r}$ puisse se développer sous la forme

$$\frac{A}{(p+qx)^r}+\frac{B}{(p+qx)^{r-1}}+\frac{C}{(p+qx)^{r-2}}+\ldots\frac{K}{p+qx}.$$

Reprenons l'équation

$$\frac{P}{Q} = \frac{M}{(p+qx)^r} + \frac{R}{S}.$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{(p+qx)^r} + \frac{B}{(p+qx)^{r-1}} + \frac{C}{(p+qx)^{r-2}} + \ldots + \frac{K}{q+px} + \frac{R}{S};$$

mettant à la place de Q sa valeur $(p+qx)^r . S$, et réduisant toutes les fractions au même dénominateur, on aura

$$R = P - S\left\{\frac{A + B(p+qx) + C(p+qx)^2 + D(p+qx)^3 + \ldots + K(p+qx)^{r-1}}{(p+qx)^r}\right\}$$

R est une fonction rationnelle et entière de x, le numérateur de la fraction doit donc être un multiple du dénominateur, et si l'on fait $p+qx=0$, on pourra le considérer comme une équation qui a un nombre r de racines égales : ainsi ce numérateur et ces différentielles successives jusqu'à celle de l'ordre $r-1$ seront zéro, dans l'hypothèse de $p+qx=0$ (534) ; ce qui donnera autant d'équations que de coefficiens $A, B, C, D \ldots K$ à déterminer en donnant au numérateur la forme suivante :

$$S\left\{\frac{P}{S} - A.(p+qx) - B(p+qx) - C(p+qx)^2 + \ldots - K(p+qx)^{r-1}\right\} = 0,$$

le facteur S ne contenant pas $p+qx$, il est visible qu'il ne faudra différentier que le polynome renfermé dans la grande parenthèse, et faire

$x = -\frac{p}{q}$ après les différentiations successives : on aura ainsi les équations suivantes :

$$\frac{P}{S} - A = 0,$$

$$d.\left(\frac{P}{S}\right) - Bq\,dx = 0,$$

$$d^2\left(\frac{P}{S}\right) - 2Cq\,dx^2 = 0,$$

$$d^3\left(\frac{P}{S}\right) - 3.2\,Dq\,dx^3 = 0.$$

.....

Il sera peut-être plus commode de différentier le numérateur de l'expression de R sous la forme où il se présente d'abord, ce qui donne, en supprimant les termes affectés de $p + qx$, les équations

$$P - AS = 0,$$
$$dP - A\,dS = BSq\,dx = 0,$$
$$d^2P - Ad^2S - 2Bq\,dS\,dx - 2CSq^2dx^2 = 0,$$
$$d^3P - A\,d^3S \ldots\ldots = 0.$$

Exemple. Soit

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^3 + x^2 + 2}{x.(x-1)^2.(x+1)^3}$$

$$= \frac{M}{x} + \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x+1}.$$

On déterminera M par la formule $\frac{nP\,dx}{dQ}$, dans laquelle on fera $n = 1$, et $x = 0$:

ce qui donne

$$P = 2,\ dQ = 1,\ \text{et}\ M = 2$$

pour déterminer A et B, on a

$$\frac{P}{S} = \frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2}, p = 1, \ldots q = -1.$$

Le facteur $p + qx = 0$ donne $x = 1$ .... donc $A = 1$: on aura B par l'équation

$$dP - A\,dS - BSq\,dx = 0,$$

ce qui donne $B = -\frac{3}{4}$. Les valeurs de C et D seront données par les mêmes équations, en observant de faire $p = 1$, $q = 1$, et $x = -1$, ce qui donnera $\frac{P}{S}$, ou $C = -\frac{1}{2}$... et $D = -\frac{5}{4}$: réunissant toutes ces fractions, on aura

$$\frac{P}{Q}, \text{ou} \frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2.(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{5}{4(x+1)}$$

$$= \frac{2}{x} \frac{7-3x}{4(x-1)^2} - \frac{(5x+7)}{4(x+1)^2} \text{ (}\textit{Algèb.}\text{ 128).}$$

341. Si la fraction proposée a au dénominateur des facteurs doubles réels qui ne puissent être décomposés qu'en facteurs simples imaginaires; on décomposera la fraction proposée en fractions simples de la forme $\frac{A+Bx}{x^2+px+q}$, et l'on déterminera les coefficiens A, B, par une méthode analogue à la précédente, ou si on aime mieux intro-

duire dans le calcul les facteurs simples imaginaires, ou déterminer les numérateurs, comme dans l'exemple suivant :

Soit la fraction $\frac{1}{a^4+x^4}$, qu'il s'agit de décomposer en fractions simples. . . Les facteurs doubles de a^4+x^4, sont

$$a^2 - a x \sqrt{2} + x^2 \text{ et } a^2 + a x \sqrt{2} + x^2.$$

Ceux-ci peuvent se réduire en facteurs simples imaginaires ; savoir :

$$a^2 - ax\sqrt{2} + x^2 = \left(x - a\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\left(x - a\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right),$$

qu'on peut mettre sous une forme plus simple, savoir ;

$$(x-(p+q\sqrt{-1})\,(x-(p-q\sqrt{-1}),$$

en faisant $\frac{a}{\sqrt{2}} = p = q.$

Le second facteur double

$$a^2 + a x \sqrt{2} + x^2$$

$$= \left(x + a\frac{(1+\sqrt{-1})}{\sqrt{2}}\right)\left(x + a\frac{(1-\sqrt{-1})}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (x+(p+q\sqrt{-1})\,(x+(p-q\sqrt{-1})).$$

Soit

$$\frac{p}{a}, \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi \ldots \frac{q}{a}, \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi :$$

on aura

$$\sqrt{p^2+q^2} = a \text{ et } \varphi = 45^d :$$

on pourra donc écrire

$$\frac{1}{a^4+x^4} = \frac{A}{x-a(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)} + \frac{B}{x-a(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)} + \frac{C}{x+a(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)} + \frac{D}{x+a(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)},$$

Pour déterminer A, B, C, D, on aura recours à la formule $\frac{np\,dx}{dQ}$ (339), dans laquelle

$$P=1\,;\ \frac{dQ}{dx}=4x^3.$$

Ainsi pour avoir A, on fera

$$x=a(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et par conséquent

$$x^3=a^3(\cos 3\varphi+\sqrt{-1}\sin 3\varphi)\ (109)\ :$$

on aura donc

$$A=\frac{1}{4a^3(\cos 3\varphi+\sqrt{-1}\sin 3\varphi)}\ :$$

en multipliant les deux termes de la fraction par

$$\cos 3\varphi-\sqrt{-1}\sin 3\varphi,$$

on aura

$$A=\frac{\cos 3\varphi-\sqrt{-1}.3\varphi}{4a^3}.$$

En se servant de la même formule, $\frac{nPdx}{dQ}$, et mettant successivement les valeurs de x tirées des dénominateurs de chaque fraction simple, égalée à zéro, on trouvera

$$B = + \frac{(\cos 3\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)}{4a^3} \ldots$$

$$C = - \frac{(\cos 3\varphi + \sqrt{-1}.\sin 3\varphi)}{4a^3} \ldots$$

$$D = - \frac{(\cos 3\varphi - \sqrt{-1}.\sin 3\varphi)}{4a^3}$$

puisqu'on a $\varphi = 45^d$, 3φ égalera $135^\circ \ldots \cos 3\varphi$

$$= - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin 3\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} :$$

donc

$$A = - \left(\frac{1+\sqrt{-1}}{4a^3\sqrt{2}}\right) \ldots B = - \left(\frac{1-\sqrt{-1}}{4a^3.\sqrt{2}}\right)$$

$$C = \left(\frac{1+\sqrt{-1}}{4a^3\sqrt{2}}\right) \ldots D = \left(\frac{1-\sqrt{-1}}{4a^3.\sqrt{2}}\right) :$$

réduisant les deux premières fractions simples au même dénominateur, elles donneront la fraction partielle

$$\frac{a\sqrt{2}-x}{2a^3.\sqrt{2}(a^2-ax\sqrt{2}+x^2)}$$

les deux autres fractions simples réduites en une seule, donneront

$$\frac{a\sqrt{2}+x}{2a^3\sqrt{2}(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)}$$

Si l'on veut éviter les facteurs imaginaires, on décomposera le dénominateur de la fraction $\frac{1}{a^4+x^4}$, en facteurs doubles réels, et l'on aura

$$\frac{1}{a^4+x^4}=\frac{Ax+B}{a^2-ax\sqrt{2}+x^2}+\frac{Cx+D}{a^2+ax\sqrt{2}+x^2}.$$

Soit en général $\frac{P}{Q}=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\frac{R}{S}$: en réduisant tous les termes du second membre au même dénominateur, et comparant les numérateurs, on a

$$R=\frac{P-S(Ax+B)}{x^2+px+q}.$$

R étant une fonction entière et rationnelle de x, $P-S(Ax+B)$ doit être divisible par

$$x^2+px+q:$$

donc $P-S(Ax+B)$ égalera zéro, lorsqu'on fera $x^2+px+q=0$: soient les deux racines imaginaires de l'équation

$$x^2+px+q=0,\ a+b\sqrt{-1},\ \text{et}\ a-b\sqrt{-1}:$$

en les substituant successivement dans P et S, on aura deux équations particulières, au moyen desquelles on déterminera A et B : ainsi dans l'exemple ci-dessus, on a

$$P=1, S=a^2+ax\sqrt{2}+x^2, x=a\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right),$$

et $$x=a\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right);$$

ce qui donnera pour S les deux valeurs suivantes :

$2a^2$

$2a^2(1+\sqrt{-1})$ et $2a^2(1-\sqrt{-1})$:

et l'équation $P - S(Ax+B) = 0$ fournira les deux suivantes :

$$1 - \frac{4a^3A\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} - 2a^2B(1+\sqrt{-1}) = 0,$$

$$1 + \frac{4a^3A\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} - 2a^2B(1-\sqrt{-1}) = 0;$$

d'où on tire

$$B = \frac{1}{2a^2} \ldots\ldots A = -\frac{1}{2a^3\sqrt{2}};$$

partant

$$\frac{Ax+B}{a^2 - ax\sqrt{2} + x^2} = \frac{a\sqrt{2} - x}{2a^3\sqrt{2}(a^2 - ax\sqrt{2} + x^2)};$$

comme on l'a déjà trouvé ; on détermineroit par la même méthode les deux coefficients indéterminés de la seconde fraction $\frac{A'x+B'}{a^2+ax\sqrt{2}+x^2}$, et l'on trouvera

$$B' = \frac{1}{2a^2} \ldots\ldots A' = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \left\{ \frac{a\sqrt{2}-x}{a^2 - ax\sqrt{2} + x^2} + \frac{a\sqrt{2}+x}{a^2 + ax\sqrt{2} + x^2} \right\}.$$

342. Si le facteur $x^2 + px + q$ qui multiplie le dénominateur de la fraction proposée étoit élevé à une puissance n, on feroit

$$\frac{P}{Q}=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{n-1}}$$
$$+\frac{Fx+G}{(x^2+px+q)^{n-2}}+\ldots\frac{Mx+N}{x^2+px+q}+\frac{R}{S}:$$

On déterminera les coefficients $A, B, C, D\ldots$ en réduisant toutes les fractions partielles au même dénominateur, comme dans le n°. (340), on prendra ensuite les $n-1$ différentielles successives du numérateur, et l'on aura ainsi n équation. Ces n équations combinées, chacune avec les deux valeurs de x provenues de l'équation $x^2+px+q=0$, fourniront $2n$ équations particulières, c'est-à-dire un nombre égal à celui des coefficients indéterminés. Nous n'entrerons pas ici dans le détail du calcul qui nous mèneroit trop loin; nous pensons que les applications que nous venons de faire du calcul différentiel, à plusieurs questions d'analyse, suffisent pour prouver qu'on peut se servir avantageusement de ce dernier pour simplifier les calculs algébriques.

CALCUL INTÉGRAL.

343. Le Calcul Intégral est par rapport au Calcul Différentiel, ce que le Calcul inverse des Différences est à la Méthode directe ; c'est-à-dire qu'il consiste à trouver la quantité finie dont une quantité infiniment petite donnée est la différentielle : on sait, par exemple, que la différentielle de x^m est $m x^{m-1} dx$; remonter de cette expression différentielle à l'expression finie x^m, est un problème de Calcul Intégral : l'opération par laquelle on passe de l'expression différentielle à l'expression finie, se nomme *intégration ;* la fonction finie et variable que l'on obtient par l'intégration est appelée *intégrale ;* et *intégrer*, c'est trouver l'intégrale d'une différentielle donnée. Ainsi dans l'exemple ci-dessus $m x^{m-1} dx$ est une expression différentielle ; x^m en est l'intégrale, et passer de la première expression à la seconde, c'est avoir intégré la première.

L'intégrale d'une quantité différentielle est en quelque sorte une somme ou une addition de quantités infiniment petites, parce que dx étant, suivant les idées de Leïbnitz, la différence qui existe entre $x+dx$ et x, on peut regarder la variable x comme la somme d'un nombre infini d'accroissemens qu'elle a reçus depuis son origine jusqu'au point où on la considère.

344. On emploie ordinairement le signe d pour marquer une différentielle, on emploiera le signe $\int$ pour marquer une somme ou une intégrale ; ainsi on écrira

$$\int . m x^{m-1} dx = x^m ,$$

comme dans le calcul différentiel on écrit

$$d . x^m = m x^{m-1} dx :$$

d'où il suit que ces deux signes $\int .$ et d, lorsqu'ils précèdent une même fonction, désignent deux opérations qui se détruisent mutuellement, comme la multiplication et la division, l'exaltation et l'extraction ; en sorte que $\int . d . x^m = x^m$, et $d . \int x^m dx = x^m dx$.

345. On a vu (291) qu'on peut substituer au calcul différentiel la méthode des limites ; le calcul intégral sera donc pour lors la méthode inverse des limites ; c'est-à-dire qu'il donne les moyens de remonter, lorsque cela se peut, de la limite au dernier rapport qu'ont entr'elles les différences finies de deux quantités variables, au rapport même de ces deux quantités. Soit par exemple l'équation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 ax + a \Delta x ,$$

dont le second membre exprime la valeur du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; la limite de ce rapport est

$$\frac{dy}{dx} = 2 ax ,$$

et remonter de cette limite à l'équation $y = ax^2$ est une opération de la méthode inverse des limites. On remarquera facilement que l'équation $\frac{dy}{dx} = 2 ax$ est la même que celle-ci

$$dy = 2 ax dx ;$$

et le calcul intégral donne directement

$\int.dy = \int.2ax\,dx$, ou $y = ax^2$:

donc les résultats de la méthode inverse des limites sont les mêmes que ceux du calcul intégral.

346. On peut aussi considérer le calcul intégral comme l'analyse inverse des fonctions ; c'est-à-dire comme un moyen de remonter des fonctions ou des équations dérivées, à celles qui les ont produites, et qu'on nomme primitives (90) ; mais sous quelque point de vue qu'on l'envisage, les règles d'intégration seront toujours les mêmes.

Le Calcul Intégral a deux parties ; l'intégration des quantités différentielles qui n'ont qu'une variable, et l'intégration des différentielles qui renferment plusieurs variables : nous donnerons les méthodes d'intégration de ces deux parties dans les deux chapitres suivans.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration des quantités différentielles qui n'ont qu'une variable.

347. Le Calcul Intégral étant l'inverse du Calcul Différentiel, il est visible que dans l'intégration d'une expression différentielle il faudra suivre des règles opposées à celles de la différentiation : or on sait que pour avoir la différentielle de x^m, il faut multiplier ce terme par l'exposant de la variable, diminuer ensuite l'exposant d'une unité, et multiplier encore par dx ; en sorte que

$$d.x^m = m\,x^{m-1}dx \text{ (277)} :$$

donc pour avoir l'intégrale de $m\,x^{m-1}dx$ il faudra

augmenter l'exposant de la variable d'une unité ; diviser ensuite par cet exposant ainsi augmenté et par la différentielle de la variable ; ainsi

$$\int. m x^{m-1} dx = x^m :$$

c'est dans cette règle bien simple que consiste l'intégration des quantités différentielles monomes qui n'ont qu'une variable.

Soit la fonction différentielle $x^n dx$, dont on demande l'intégrale : en suivant la règle prescrite on augmentera l'exposant n d'une unité, on aura $n+1$; on divisera le terme différentiel par l'exposant ainsi augmenté et par dx, et l'on aura pour intégrale

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} :$$

en différentiant cette dernière fonction, on retrouvera l'expression différentielle d'où on est parti :

donc $$\int. x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Si la différentielle $x^n dx$ étoit multipliée par une constante A, l'intégrale seroit multipliée par la même constante ; c'est-à-dire que

$$\int. A x^n dx = A \int. x^n dx = \frac{A x^{n+1}}{n+1} ;$$

car en différentiant de nouveau

$$\frac{A x^{n+1}}{n+1} ,$$

on trouve

$$A x^n dx ;$$

en sorte qu'on peut multiplier ou diviser à volonté les expressions différentielles par des constantes, sans que cela influe sur les règles d'intégration.

Nous ferons ici une remarque analogue à celle qui a été faite dans la méthode inverse des différences (265).

La différentielle de x^n plus une constante K est la même que celle de x^n : donc réciproquement, l'intégrale de $n x^{n-1} dx$ est x^n augmenté d'une constante, qui se détermine ensuite dans chaque cas particulier par les conditions du problème. Ces conditions se réduisent ordinairement à faire en sorte que x étant égalée à une valeur déterminée a, l'intégrale se réduise à une quantité connue b; ainsi dans l'exemple ci-dessus, pour conserver à l'intégrale toute sa généralité, on écrira

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K,$$

K étant la constante arbitraire qu'il faut toujours ajouter après l'intégration.

348. Toute fonction différentielle qui n'a qu'une variable est contenue dans la formule générale $X dx$, X étant une fonction quelconque de x et de constantes, entière ou fractionnaire, rationnelle ou irrationnelle, algébrique ou transcendante; l'intégration des fonctions différentielles qui n'ont qu'une variable, consiste donc à trouver la valeur de $\int X dx$; mais cette expression n'étant pas généralement intégrable, du moins par les règles connues, on ne peut l'intégrer que pour certaines formes déterminées. Nous allons exposer ici ce qu'on connoît de plus important sur cette branche du Calcul Intégral, à laquelle on a donné le nom de *Méthode des quadratures*, parce que la quadrature des courbes géométriques dépend de la connoissance de $\int X dx$, comme on le verra dans les applications (368); pour présenter avec ordre les différens cas d'intégrabilité de $\int X dx$, nous en ferons le sujet d'autant de problèmes.

Probléme premier.

349. Etant donnée l'équation

$$dy = Ax^m dx + Bx^n dx + Cx^p dx + \&c.$$

on propose de l'intégrer, les exposans m, n, p, &c. étant quelconques.

Solution. On aura, d'après la règle prescrite (347),

$$y = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{n+1}}{n+1} + \frac{Cx^{p+1}}{p+1} \ldots + K.$$

On sent bien qu'il n'est pas nécessaire de faire entrer dans le calcul trois lettres différentes pour désigner les trois constantes arbitraires qu'on doit introduire par l'intégration; la seule lettre K suffit pour les désigner toutes les trois.

Pour déterminer la valeur de K, supposons que lorsque $x = a$, $y = 0$; cette condition particulière sera remplie par l'équation

$$\frac{Aa^{m+1}}{m+1} + \frac{Ba^{n+1}}{n+1} + \frac{Ca^{p+1}}{p+1} + K = 0,$$

ce qui donne

$$K = -\frac{Aa^{m+1}}{m+1} - \frac{Ba^{n+1}}{n+1} - \frac{Ca^{p+1}}{p+1},$$

et par conséquent

$$y = A\left(\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}\right) + B\left(\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\right) + C\left(\frac{x^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}\right).$$

Les constantes ajoutées par l'intégration ont ici une forme semblable à celle de la fonction inté-

grée; et comme ces constantes sont par leur nature indéterminées, rien n'empêche de leur donner toujours une forme analogue à celle du terme intégré; cette forme d'ailleurs est justifiée par la loi des homogènes.

350. *Remarque.* Si quelqu'un des exposans $m, n, p\ldots$ l'exposant m, par exemple, devenoit -1, alors l'intégrale correspondante $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ deviendroit

$$\frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{1}{0};$$

et la règle générale d'intégration sembleroit être en défaut pour ce cas particulier; mais on remarquera que $\mathcal{A}\, x^{-1}\, dx = \mathcal{A}\frac{dx}{x}$: or l'intégrale de $\frac{dx}{x} = \log x$, parce que $d.\log x = \frac{dx}{x}$; donc lorsque l'exposant m est -1, l'intégrale de ce terme est donnée par les logarithmes : ainsi

$$\int \mathcal{A}\, x^{-1} dx = \mathcal{A}\log x + K.$$

Supposons que lorsque $x = a$ l'intégrale de ce terme doive être zéro, on aura

$$\mathcal{A}\log a + K = 0,$$

et par conséquent

$$K = -\mathcal{A}\log a;$$

donc

$$\int \mathcal{A}\, x^{-1} dx = \mathcal{A}\,(\log x - \log a) = \mathcal{A}\log\frac{x}{a}\ldots.$$

c'est à-peu-près ainsi que ce cas particulier qui semble faire exception à la règle générale est intégré dans presque tous les livres élémentaires.

Bossut a fait voir de la manière suivante que l'intégrale du terme $A x^m dx$, lorsque $m = -1$, est renfermée dans l'intégrale générale

$$\frac{A(x^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}.$$

Développons en série les deux termes x^{m+1}, a^{m+1}; on aura selon ce qui a été dit (107),

$$x^{m+1} = 1 + \overline{m+1}\log x + \frac{(\overline{m+1}\log x)^2}{2} + \frac{(\overline{m+1}\log x)^3}{2.3} + \ldots.$$

$$a^{m+1} = 1 + \overline{m+1}\log a + \frac{(\overline{m+1}\log a)^2}{2} + \frac{(\overline{m+1}\log a)^3}{2.3} + \ldots.$$

donc

$$\frac{A(x^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}$$

$$= A\{\log x - \log a + \overline{m+1}(\overline{\log x}^2 - \overline{\log a}^2) + \ldots\}$$

La loi du développement de ces quantités exponentielles est indépendante de la valeur de m; donc elle aura lieu lorsque $m = -1$; mais dans cette hypothèse la série du développement se réduit aux deux premiers termes

$$A(\log x - \log a) = A \log \frac{x}{a};$$

donc l'intégrale de $A x^{-1} dx$ est renfermée dans l'intégrale générale, comme celle de tout autre cas particulier.

On peut conclure de ce qui précède, que toute fonction différentielle algébrique composée de monomes ayant des coefficiens et des exposans quel-

conques, est généralement intégrable; et que son intégrale ne contiendra que des expressions algébriques ou des logarithmes.

Exemples. On propose d'intégrer l'équation

$$dy = 3x\,dx + \tfrac{2}{5}\,dx\sqrt{x} - \frac{3\,dx}{\sqrt{x}} + 5x^2\,dx\sqrt[3]{x} + \frac{\frac{3}{5}\,x\,dx}{\sqrt[3]{x}} \ldots.$$

On commencera par mettre tous les radicaux sous la forme d'exposans fractionnaires

$$dy = 3x\,dx + \tfrac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}dx - 3x^{-\frac{1}{2}}dx + 5x^{\frac{2}{3}}dx + \tfrac{3}{5}x^{\frac{1}{3}}dx \ldots$$

en intégrant chaque terme séparément, on aura

$$y = \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{2}x^{\frac{10}{3}} + \tfrac{9}{25}x^{\frac{5}{3}} + K;$$

ce qu'on vérifiera facilement par la différentiation.

Problème second.

351. Etant donnée l'équation

$$dy = x^m dx\,(a + bx^n)^p,$$

dans laquelle p est un nombre entier positif, on en demande l'intégrale.

Solution. Puisque p est un nombre entier positif, en développant le binome $(a+bx^n)^p$, on aura un nombre $p+1$ de termes, on multipliera chaque terme par $x^m dx$, et l'on n'aura plus que des monomes à intégrer.

Exemple. On propose d'intégrer l'équation

$$d.y = x^{\frac{2}{3}}\,dx\,(a+bx^3)^2,$$

on aura

$$dy = a^2 x^{\frac{2}{3}}\,dx + 2ab\,x^{\frac{11}{3}}\,dx + b^2 x^{\frac{20}{3}}\,dx.$$

donc

$$y = \tfrac{3}{1} a^2 x^{\frac{1}{3}} + \tfrac{6}{14} a b x^{\frac{14}{3}} + \tfrac{3}{23} b^2 x^{\frac{23}{3}} + K$$

$$= 3 x^{\frac{1}{3}} \left(\frac{a^2}{5} + \frac{2}{14} a b x^3 + \frac{1}{23} x^6 \right) + K.$$

Si on a à intégrer l'équation

$$dy = x^m dx (A x^q + B x^r + C x^s)^p,$$

les exposans q, r, s étant quelconques, et p étant toujours un nombre entier positif, le problème n'aura pas plus de difficulté que le précédent; on commencera par développer le trinome ou le polynome en une suite de termes dont le nombre sera fini; on multipliera chaque terme par $x^m dx$, et l'on intégrera.

Lorsque p n'est pas un nombre entier positif, la fonction $x^m dx (a + b x^n)^p$ ne peut pas se réduire généralement à un nombre fini de termes; et l'on ne peut l'intégrer par les règles déjà prescrites que lorsqu'il existe entre les exposans m, n, p, certaines relations que nous allons déterminer.

Problème troisième.

352. Soit l'équation

$$dy = x^m dx (a + b x^n)^p,$$

dans laquelle p n'est pas un nombre entier positif, on demande la relation qui doit exister entre m, n, p, pour que l'intégration dépende du problème précédent.

Solution. 1°. Si l'on a

$$m = n - 1,$$

en multipliant et divisant le second membre de l'équation par bn, on a

$$dy = \frac{b\,n\,x^{n-1}\,dx}{b\,n}\,(a+b\,x^n)^p\,;$$

et désignant $a+b\,x^n$ par X, on a

$$n\,b\,x^{n-1}\,dx = dX:$$

donc
$$dy = \frac{X^p\,dX}{b\,n},$$

expression qui est sous la forme d'un monome, dont l'intégrale sera

$$\frac{X^{p+1}}{b\,n\,(p+1)} + K;$$

et remettant à la place de X sa valeur, on aura

$$y = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{b\,n\,(p+1)} + K.$$

2°. De l'équation $a+b\,x^n = X$, on tire

$$x^{m+1} = \left(\frac{X-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}};$$

et en différentiant

$$x^m dx = \frac{1}{bn}\left(\frac{X-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \times d.X:$$

mettant cette valeur à la place de $x^m\,dx$, et X^p à la place de $(a+b\,x^n)^p$, on a

$$dy = \frac{X^p\,dX}{b\,n}\left(\frac{X-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1};$$

cette équation aura un nombre fini de termes si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier positif, que nous dési-

gnerons par i. Dans cette hypothèse on a

$$m+1=in;$$

donc la fonction $x^m dx(a+bx^n)^p$ pourra s'intégrer par les méthodes précédentes lorsque l'exposant de la variable hors du binome, augmenté d'une unité, sera un multiple de l'exposant de la même variable dans le binome.

3°. Si on divise les deux termes du binome par x^n, et qu'on multiplie le facteur hors du binome par x^{np}, la fonction proposée prendra la forme suivante,

$$x^{m+np}dx(b+ax^{-n})^p:$$

or nous venons de voir que lorsque l'exposant de la variable hors du binome augmenté d'une unité est un multiple de l'exposant de la variable dans le binome, la fonction se ramène à un nombre fini de monomes; donc on pourra encore l'y ramener lorsque $m+np+1=-in$, ou lorsque $\frac{m+np+1}{-n}$ sera un nombre entier positif.

Il suit des numéros premier, second et troisième de ce problême, qu'on peut intégrer algébriquement les différentielles suivantes:

$$\int.x^{n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\ldots\int.\frac{x^{n-1}dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}\ldots$$

$$\int.\frac{x^{sm+1}dx}{\sqrt{1\pm x^s}}\ldots\int.\frac{dx}{x^{sm}\sqrt{1\pm x^s}}.$$

Exemple premier. Soit l'équation

$$dy=Ax^3dx\sqrt{a+bx^4},$$

on a ici

$$m=3\ldots n=4;$$

et par conséquent

$$m = n - 1 :$$

donc

$$y = \frac{A}{6.b}(a+bx^4)^{\frac{3}{2}} + K.$$

Exemple second. Soit l'équation

$$dy = Ax^3\,dx\sqrt{a+bx^2}.$$

on a ici

$$\frac{m+1}{n} = 2 ;$$

on aura donc (deuxième cas)

$$dy = \frac{A}{2b^2}(X^{\frac{3}{2}}dX - aX^{\frac{1}{2}}dX),$$

et $$y = \frac{A}{15\,b^2}(3X - 5a)\times\sqrt{X^3} + K$$

$$= \frac{A}{15\,b^2}(3bx^2 - 2a)(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} + K.$$

Exemple troisième. Soit l'équation

$$dy = \frac{dx}{x^2(a+x^3)^{\frac{5}{3}}} \cdots$$

on a ici

$$\frac{m+np+1}{-n} = 2,$$

d'où en faisant $1 + ax^{-3} = X$, on aura (3e cas)

$$dy = -\frac{1}{3a^2}X^{-\frac{5}{3}}dX(X-1)$$

$$= -\frac{X^{-\frac{2}{3}}dX + X^{-\frac{5}{3}}dX}{3a^2},$$

et en intégrant

$$y = K - \frac{1}{a^2} X^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2a^2} X^{-\frac{1}{3}},$$

et remettant à la place de X sa valeur, on a

$$y = K - \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(1 + \frac{x^3}{2(x^3 + a)}\right)$$

Concluons des deux problèmes précédens que toute différentielle binome, représentée par la formule $x^m dx (a + bx^n)^p$ est intégrable algébriquement, 1°. toutes les fois que $m = n - 1$, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de p; 2°. toutes les fois que p est un nombre entier positif, quels que soient m et n; 3°. toutes les fois que $\frac{m+1}{n}$ sera un nombre entier positif, quel que soit p; 4°. toutes les fois que $\frac{m + np + 1}{-n}$ sera un entier positif...

Passons à l'intégration de la fonction $X dx$, lorsque X est une fonction rationnelle.

Intégration des fractions différentielles rationnelles.

353. On entend par fraction différentielle rationnelle, toute fraction comme

$$\left\{\frac{Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots T}{x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \ldots T'}\right\} dx$$

dans laquelle le numérateur et le dénominateur sont chacun une suite finie de monomes: les exposans m et n étant des nombres entiers positifs. Si m est plus grand que n, on divisera le numérateur par

par le dénominateur jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste dont l'exposant soit moindre que n: de cette manière on aura

$$\left\{\frac{A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \ldots T}{x^n + A' x^{n-1} + B' x^{n-2} \ldots + T'}\right\} dx$$
$$= A x^{m-n}\, dx + b x^{m-n-1}\, dx + c x^{m-n-2} dx \ldots$$
$$+ \left\{\frac{p x^{n-1} + q x^{n-2} + r x^{n-3} + \ldots . t}{x^n + A' x^{n-1} + B' x^{n-2} + \ldots . T'}\right\} dx.$$

On vient de voir comment on intégre les monomes $A x^{m-n} dx$ ... etc. Tout se réduit donc à intégrer la partie fractionnaire, que nous représenterons par $\frac{P dx}{Q}$.

Soit par exemple,

$$X dx = -\frac{x^5 dx}{1-x^2};$$

on aura en divisant,

$$x\, dx + x^3 dx - \frac{x\, dx}{1-x^2} \ldots$$

dont la dernière partie est la seule fractionnaire; c'est celle que nous désignons par $\frac{P dx}{Q}$.

Problème quatrième.

354. On propose d'intégrer l'équation

$$dy = \left\{\frac{p x^{n-1} + q x^{n-2} + r x^{n-3} + \ldots . t}{x^n + A' x^{n-1} + B' x^{n-2} \ldots + T'}\right\} dx.$$

Solution. On a vu que tout polynome de la

forme $x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \ldots + R'x + T'$, peut être considéré comme le produit d'un nombre n de facteurs simples, réels, ou imaginaires; parmi ces facteurs simples, il peut s'en trouver plusieurs égaux, soit parmi les réels, soit parmi les imaginaires, en sorte que Q peut se mettre sous la forme

$$(x \pm a)(x \pm b)^m (x + p \pm q\sqrt{-1})^s \ldots$$

on mettra donc la fraction $\frac{P\,dx}{Q}$ sous la forme suivante:

$$\frac{M\,dx}{x \pm a} + \ldots + \frac{N\,dx}{(x \pm b)^m} + \frac{N'\,dx}{(x \pm b)^{m-1}} + \frac{N''\,dx}{(x \pm b)^{m-2}} \ldots$$
$$+ \frac{N^{(n)}\,dx}{x \pm b} + \frac{R\,dx}{x + p \pm q\sqrt{-1}} + \ldots.$$
$$+ \frac{S\,dx}{(x + r \pm s\sqrt{-1})^s} + \frac{S'\,dx}{(x + r \pm s\sqrt{-1})^{s-1}}$$
$$+ \frac{S''\,dx}{(x + r \pm s\sqrt{-1})^{s-2}} + \ldots \text{&c.} \ldots (340)$$

Les coefficiens

$$M, \ldots N, N', N'' \ldots R \ldots S, S', S'' \ldots$$

étant des constantes qu'on déterminera, soit par la méthode des coefficiens indéterminés (algéb. 123), soit par le calcul différentiel (339).

Si l'on fait $x \pm a = z$, on aura

$$dx = dz;$$

donc

$$\frac{M\,dx}{x + a} = \frac{M\,dz}{z};$$

en mettant z' à la place de $x \pm b$, on aura

$$\frac{N\,dx}{(x \pm b)^m} = \frac{N\,dz}{z'^m}.$$

Si l'on fait $x + p \pm q\sqrt{-1} = z''$,
on aura

$$\frac{R\,dx}{(x + p \pm q\sqrt{-1})} = \frac{R\,dz''}{z''}$$

et si l'on fait

$$x + r \pm s\sqrt{-1} = z'''$$

on aura

$$\frac{S\,dx}{(x + r \pm s\sqrt{-1})^n} = \frac{S\,dz'''}{z'''};$$

ainsi l'intégration de l'équation

$$dy = \left\{\frac{p\,x^{n-1} + q\,x^{n-2} + r\,x^{n-3} + \ldots\ldots + T}{x^n + A'\,x^{n-1} + B'\,x^{n-2} + \ldots\ldots T'}\right\} dx$$

est réduite à celle des monomes de la forme suivante :

$$1^\circ. \int \frac{M\,dz}{z} = M \log. z + K$$

$$= M \log. (x \pm a) + K.$$

$$2^\circ. \int \frac{N\,dz}{z'^m} = K' - \frac{N}{m-1} \cdot \frac{1}{z'^{m-1}}$$

$$= K' - \frac{N}{m-1} \cdot \frac{1}{(x \pm b)^{m-1}}.$$

$$3^\circ. \int \frac{R\,dz''}{z''} = R \log. z'' + K''$$

$$= R \log. (x + p \pm q\sqrt{-1}) + K''.$$

$$4°.\int\frac{S\,dz'''}{z'''^{.n}}=K'''-\frac{S}{n-1}\frac{1}{z'''^{.n-1}}$$

$$=K'''-\frac{S}{n-1}\frac{1}{(x+r\pm s\sqrt{-1})^{n-1}}.$$

On fera disparoître les imaginaires introduites dans le calcul par l'intégration des fractions

$$\frac{R\,dx}{x+p\pm q\sqrt{-1}},$$

en substituant des arcs de cercle réels aux logarithmes des facteurs imaginaires (111) : soit pour cela $x+p=z$, et ensuite $\sqrt{z^2+q^2}=r$, et l'on aura

$$+p\pm q\sqrt{-1})=\log.r\log.\left(\frac{z}{r}\pm\frac{q\sqrt{-1}}{r}\right).$$

Soit φ l'angle dont le cosinus $=\frac{z}{r}$, et dont le sinus est $\frac{q}{r}$, on a

$$\frac{z}{r}\pm\frac{q}{r}\sqrt{-1}=\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\varphi=e^{\pm\varphi\sqrt{-1}}\,(111):$$

donc

$$\log.(x+p\pm q\sqrt{-1}=\log.r\pm\varphi\sqrt{-1}.$$

Le coefficient R déterminé d'après la méthode du n°. (339), sera de la forme

$$\pm\frac{Aq\sqrt{-1}-B}{\pm 2q\sqrt{-1}};$$

et à cause du double signe, on aura deux valeurs pour R; la première

$$\frac{Aq\sqrt{-1}-B}{2q\sqrt{-1}},$$

aura lieu pour la fraction

$$\frac{R\,dx}{x+p+q\sqrt{-1}}.$$

La seconde

$$\frac{\mathcal{A}q\sqrt{-1}+B}{2q\sqrt{-1}}$$

sera employée pour la fraction

$$\frac{R'\,dx}{x+p-q\sqrt{-1}}:$$

ainsi les deux intégrales réunies donneront

$$\mathcal{A}\log.r-\frac{B}{q}\varphi=\mathcal{A}\log.\sqrt{(x+p)^2+q^2}$$

$$\mp\frac{B}{q}\text{arc cos}\frac{x+p}{\sqrt{(x+p)^2+q^2}},$$

expression débarrassée d'imaginaire.

Quant aux termes de la forme

$$\frac{+S}{1-n}\frac{1}{(x+r\pm s\sqrt{-1})^{n-1}},$$

on trouvera, 1°. que le coefficient S est de la forme $\mathcal{A}'\pm B'\sqrt{-1}$, 2°. qu'en faisant

$$x+r=z,\ z^2+r^2=a^2,\ \frac{z}{a}=\cos\varphi,\ \text{et}\ \frac{s}{a}=\sin\varphi,$$

le dénominateur $(x+r\pm s\sqrt{-1})^{n-1}$, deviendra

$$a^{n-1}(\cos\overline{n-1}.\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\overline{n-1}\,\varphi)\ (115):$$

les deux fractions réunies

$$\frac{A+B\sqrt{-1}}{1-n}\left(\frac{1}{a^{n-1}(\cos n-1\varphi+\sqrt{-1}.\sin n-1\varphi)}\right)$$
$$\frac{A-B\sqrt{-1}}{1-n}\left(\frac{1}{a^{n-1}(\cos n-1\varphi-\sqrt{-1}\sin.n-1\varphi)}\right)$$

donneront, en les réduisant au même dénominateur,

$$\frac{2A.\cos\overline{n-1}.\varphi+2B.\sin\overline{n-1}\varphi}{(1-n)a^{n-1}}.$$

Exemples. Proposons-nous d'intégrer les fonctions différentielles suivantes :

1°
$$\frac{(x^3+x^2+2)}{x(x-1)^2(x+1)^2}dx,$$

On représentera cette fraction par $\frac{Pdx}{Q}$, et l'on fera

$$\frac{P}{Q}=\frac{M}{x}+\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{x+1}.$$

On a vu (340) que

$M=2, A=1 \ldots B=-\frac{3}{4} \ldots C=-\frac{1}{2} \ldots D=-\frac{5}{4}$:

donc

$$\frac{Pdx}{Q}=\frac{2dx}{x}+\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{3}{4}\frac{dx}{x-1}-\frac{dx}{2(x+1)^2}-\frac{5}{4}\frac{dx}{x+1}$$

et

$$\int\frac{pdx}{Q}=2\log.x-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{4}\log.(x-1)$$
$$+\frac{1}{2.(x+1)}-\frac{5}{4}\log.(x+1)+K=\frac{-(x+1)}{2(x^2-1)}$$
$$+\log.\left\{\frac{x^2}{\sqrt{x+1}\times\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}\right\}+K.$$

2°. $\dfrac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$:

le dénominateur de cette fraction peut se mettre sous la forme suivante :

$$x^3(x+1)(x^2-1)(x^2+1).$$

Les deux derniers facteurs se décomposent en

$$x+1, x-1, x+\sqrt{-1}, x-\sqrt{-1}:$$

on aura donc

$$\frac{Pdx}{Q}=\frac{Adx}{x^3}+\frac{Bdx}{x^2}+\frac{Cdx}{x}+\frac{Ddx}{x-1}+\frac{Fdx}{(x+1)^2}$$

$$+\frac{Gdx}{x+1}+\frac{Hdx}{x+\sqrt{-1}}+\frac{Ldx}{x-\sqrt{-1}}$$

pour trouver les trois coefficiens $A, B, C,$ on fera usage des trois équations

$$P-AS=0\ldots dP-Ads-BSdx=0\ldots$$
$$d^2P-Ad^2S-2BdSdx-2CSdx^2=0\ldots(340);$$

en observant que dans ce cas particulier

$$P=1, \text{ et } S=x^5+x^4-x-1;$$

En faisant $x=0$, on a, pour la première équation

$$A=\frac{P}{S}=-1:$$

par la seconde,

$$-1+B=0, \text{ ou } B=1:$$

par la troisième,

$$2+2C=0, \text{ ou } C=-1;$$

ainsi les trois premières fractions seront

$$-\frac{dx}{x^3}+\frac{dx}{x^2}-\frac{dx}{x}.$$

On déterminera D par la formule $\frac{Pdx}{dQ}$, dans laquelle on fera $x=1$, et l'on aura

$$D=\frac{1}{8x^7+7x^6-4x^5-3x^2}=\frac{1}{8}.$$

ainsi la quatrième fraction sera

$$\frac{dx}{8(x-1)}.$$

Les cinquième et sixième coefficiens seront donnés par les équations déjà employées

$$P-FS=0\ldots dP-FdS-GSdx=0,$$

dans lesquelles

$$S=x^6-x^5+x^4-x^3, \text{ et } x=-1,$$

on aura donc

$$F=\frac{P}{S}=\frac{1}{4} \text{ et } G=\frac{9}{8}.$$

La cinquième et la sixième fraction sera donc

$$\frac{dx}{4(x+1)^2} \text{ et } \frac{9dx}{8(x-1)}.$$

Enfin les septieme et huitième coefficiens H, L, se détermineront par la formule $\frac{Pdx}{dQ}$, dans laquelle on fera

$$x=\mp\sqrt{-1},$$

on aura

$$H=\frac{-1-\sqrt{-1}}{8}\ldots L=\frac{-1+\sqrt{-1}}{8}:$$

les deux dernières fractions seront donc

$$-\frac{(1+\sqrt{-1})}{8}\frac{dx}{x+\sqrt{-1}},-\frac{(1-\sqrt{-1})}{8}\frac{dx}{x-\sqrt{-1}}:$$

réunissant toutes ces fractions, et intégrant, on a

$$\int\frac{dx}{x^8+x^7-x^6-x^3}=+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$
$$-\log.x+\tfrac{1}{8}\log.(x-1)+\tfrac{9}{8}\log.(x^2+1)$$
$$-\frac{(1+\sqrt{-1})}{8}\log.(x+\sqrt{-1})-\frac{(1+\sqrt{-1})}{8}$$
$$\log(x-\sqrt{-1})+K.$$

La réunion de tous les termes algébriques produira la fraction

$$\frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)};$$

celle des logarithmes des quantités réelles donnera

$$\frac{1}{8}\left(\log(x^2-1)+\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right);$$

les logarithmes des quantités imaginaires se réduisent à

$$+\frac{1}{8\sqrt{-1}}\log\left(\frac{x+\sqrt{-1}}{x-\sqrt{-1}}\right)-\frac{1}{8}\log(x^2+1):$$

mais on sait que

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(\frac{x+\sqrt{-1}}{x-\sqrt{-1}}\right)=+\text{arc tang}\frac{1}{x},$$

ou $\qquad -\text{arc tang } x \ (111)$:

on aura donc, toute réduction faite,

$$\int \frac{dx}{x^8+x^7-x^6-x^5} = \frac{2-2x-5x^2}{4x^4(1+x)} +$$

$$\frac{1}{8}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \log\frac{x+1}{x} - \frac{1}{4}\text{ arc tang } x + K.$$

3°. $\dfrac{dx}{a^4+x^4}$: on a vu (341), que cette fraction peut se décomposer en les suivantes :

$$\frac{A\,dx}{x-a(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)} + \frac{B\,dx}{x-a(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)}$$

$$+\frac{C\,dx}{x+a(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)} + \frac{D\,dx}{x+a(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)};$$

donc

$$\int \frac{dx}{a^4+x^4} = A(\log(x-a)\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

$$+ B\log(x-a(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi))$$

$$+ C\log(x+a(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi))$$

$$+ D\log(x+a(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi))$$

mettant à la place de A, B, C, D, les valeurs trouvées (341), réunissant entr'eux les logarithmes multipliés par les coefficiens réels, et ceux qui sont multipliés par $\sqrt{-1}$, on a

$$\frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\log\left\{\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}\right\} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}$$

$$\left\{\text{arc tang}\frac{x\sqrt{2}+a}{a} + \text{arc tang}\frac{x\sqrt{2}-a}{a}\right\}.$$

on peut aussi, à la place de ces deux arcs, substituer un arc unique, dont la tangente est

$$\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}$$ (trigonométrie, note 14).

4°. $\frac{dx}{(x^2+1)^2}$: on a

$$\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{A\,dx}{(x+\sqrt{-1})^2} + \frac{B\,dx}{x+\sqrt{-1}} + \frac{C\,dx}{(x-\sqrt{-1})^2} + \frac{D\,dx}{x-\sqrt{-1}}.$$

En déterminant les coefficiens par les méthodes ordinaires, on trouve

$$A=-\frac{1}{4}\ldots B=\frac{\sqrt{-1}}{4}\ldots C=-\frac{1}{4}\ldots D=\frac{\sqrt{-1}}{4}:$$

donc

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4(x+\sqrt{-1})} + \frac{1}{4(x-\sqrt{-1})} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\log\left(\frac{x+\sqrt{-1}}{x-\sqrt{-1}}\right) + K = \frac{x}{2(x^2+1)^2} + \tfrac{1}{2}\text{ arc tang } x + K.$$

355. Quelle que soit la forme de la fonction rationnelle $X\,dx$, on pourra toujours la décomposer en différens termes de la forme

$$Ax^m\,dx, \text{ ou } \frac{B\,dx}{(a+bx)^m},$$

m étant un nombre entier positif, et $a+bx$ un facteur réel ou imaginaire du dénominateur de la

fonction, si elle est fractionnaire, et on voit par tout ce qui précède, que l'intégrale complète de $X dx$ ne contiendra que des quantités algébriques, ou des logarithmes et des arcs de cercle : la seule difficulté consiste à décomposer le dénominateur en ses facteurs simples; mais cette décomposition est un problême de l'analyse ordinaire que nous avons suffisamment expliquée n°. (1 et suivans).

356. Si la fonction $X dx$ qu'il s'agit d'intégrer contient des radicaux au numérateur ou au dénominateur, on cherchera à la rendre rationnelle par des substitutions convenables : on a vu (352), les cas où l'on peut rendre rationnelle la fonction

$$A x^m dx (a + bx^n)^p,$$

p étant un nombre fractionnaire ; mais cela n'est possible, en général, par les méthodes connues, que pour les radicaux de la forme $\sqrt{a+bx+cx^2}$: comme cette branche du calcul intégral n'est guère avancée, et que d'ailleurs la méthode de rendre rationnelle une fonction radicale appartient à l'analyse indéterminée ; nous renvoyons, pour ce dernier problême, à l'algèbre d'Euler, tome II, et pour ce qui regarde l'intégration de ces fonctions, au calcul intégral de Cousin et de Lacroix.

Lorsque la différentielle binome et irrationnelle $x^m dx (a + bx)^{\frac{p}{q}}$ n'a pas les conditions nécessaires, on ne peut la rendre rationnelle, mais dans ce cas, on cherche à ramener la différentielle proposée à quelqu'autre différentielle que l'on sache intégrer ; si cette réduction est possible, on y parviendra par les méthodes exposées dans les deux problêmes suivans.

Problème cinquième.

357. Soient les deux formules différentielles

$$x^m dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}, \text{ et } x^\alpha dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}};$$

m étant $> \alpha$, on demande quand il est possible de faire dépendre l'intégrale de la première de l'intégrale de la seconde.

Solution. Proposons-nous de différentier la formule $x^r (z + bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$: on aura

$$d \cdot x^r (a + bx^n)^{\frac{p}{q}+1} = r x^{r-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$
$$+ bn \frac{(p+q)}{q} x^{r+n-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$$
$$= ar x^{r-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$$
$$+ \frac{b}{q} (np + nq + rq) x^{r+n-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

et revenant de la différentielle à l'intégrale, on a

$$\int x^{r+n-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$$
$$= \frac{qx^r (a + bx^n)^{\frac{p}{q}+1} - aqr \int x^{r-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b (np + nq + qr)};$$

Soit $r + n - 1 = m$, ou $r = m - n + 1$.

La formule deviendra

$$\int x^m dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$$
$$= \frac{qx^{m-n+1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} - aq(m-n+1) \int x^{m-n} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b (np + mq + q)}.$$

en substituant dans cette formule $m-n$ à la place de m, on aura

$$\int x^{m-n}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\frac{qx^{m-n+1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}-aq(m-n+1)\int x^{m-n}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b(np+(m-n)q+q)}:$$

continuant à substituer successivement

$m-2n, m-3n, m-4n \ldots m-(i-1)n$

à la place de m dans la première formule, on ramènera l'intégrale $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ à celle de $\int x^{m-in}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$: i étant un nombre entier. Soit fait $m-in=\alpha$: on en déduit $\frac{m-\alpha}{n}=i$: donc, pour qu'il soit possible de ramener la première des deux intégrales désignées à la seconde, il faut que $\frac{m-\alpha}{n}$ soit un nombre entier positif.

Si m est $>\alpha$, on cherchera à ramener l'intégrale $\int x^{\alpha}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ à celle de $\int x^m dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, ce qui ne demande d'autre calcul que de substituer dans le précédent α à la place de m, et réciproquement l'équation de condition sera pour lors

$$\frac{\alpha-m}{n}=i.$$

Supposons que m soit un nombre négatif; en écrivant $-m$ à la place de m, on aura

$$b(np-mq+q)\int x^{-m}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

$$=qx^{-m-n+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}-aq(1-m-n)\int x^{-m-n}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

Si on fait passer le dernier terme du second mem-

bre dans le premier, et le terme du premier membre dans le second, on aura

$$aq(1-m-n)\int x^{-m-n}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$
$$=qx^{-m-n+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}-b(np-mq+q)\int x^{-m}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}};$$

faisons $m+n=m'$, la formule deviendra

$$\int x^{-m'}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$
$$=\frac{qx^{-m'+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}-b(np+nq-m'q+q)\int x^{-m'+n}}{aq(1-m')}$$

mettant successivement

$$-m'+n,\ -m'+2n\ldots-m'+3n\ldots\&c.$$

à la place de $-m'$ dans la formule précédente, on ramènera l'intégrale $\int x^{-m'}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ à celle de $\int x^{-m'+in}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, après avoir fait les substitutions et les intégrations indiquées, si on représente le coefficient du premier terme par A, celui du second terme par B, celui du troisième par C, et ainsi des autres; on aura les deux formules suivantes, pour ramener l'intégration d'une différentielle binome, à celle d'une autre différentielle connue :

$$\text{I.}\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$
$$\left\{\frac{qx^{m-n+1}}{b(mq+np+q)}-\frac{A.aq(m-n+1)x^{m-2n+1}}{b(mq-nq+np+q)}\right.$$
$$+\frac{B.aq(m-2n+1)x^{m-3n+1}}{b(mq-2nq+np+q)}$$
$$\left.-\frac{C.aq(m-3n+1)x^{m-4n+1}}{b(mq-3nq+np+q)}\right.$$

$$+\frac{Maq(m-(i-1)n+1)x^{m-in+1}}{b(mq-(i-1)nq+np+q)}\Big\}$$

$$\pm\dot{N}\frac{aq}{b}(m-in+1)\int x^{m-in}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

II. $$\int x^{-m}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$

$$\Big\{\frac{x^{-m+1}}{-a(m-1)}+\frac{Ab(mq-nq-np-p)x^{-m+n+1}}{aq(m-n\pm1)}$$

$$-\frac{Bb(mq-2nq-np-q)x^{-m+2n+1}}{aq(m-2n-1)}$$

$$+\frac{Cb(mq-3nq-np-q)x^{-m+3n+1}}{aq(m-3n-1)}$$

$$\ldots.+\frac{Mb(mq-(i-1)nq-np-q)x^{-m+in+1}}{aq(m-(in)-1)}\Big\}$$

$$\pm\frac{Nb}{aq}(mq-inq-np-q)\int x^{-m+(i+1)n}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

Le signe supérieur du dernier terme a lieu lorsque i est nn nombre pair, et le signe inférieur, toutes les fois que i est impair.

Par le moyen de la formule I, tous les cas particuliers d'intégration renfermés dans l'expression $\int.\frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, pourront être ramenés à l'intégrale $\int.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, qui est celle d'un arc de cercle, comme nous le verrons bientôt. La formule II fournit le moyen de faire dépendre l'intégration de $\int.\frac{dx}{x^{2m+1}\sqrt{1-x^2}}$, de celle de $\int.\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ qui est donnée par les logarithmes.

Exemple

Exemple premier. Soit la différentielle $\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, dont on propose de réduire l'intégrale à celle de $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$: on a, pour ce cas particulier

$m=10,\ldots n=2, p=-1,\ldots q=2,\ldots$

$a=1\ldots b=-1\ldots a=0$, et $\frac{m-a}{n}=5=i$.

donc la réduction est possible : on trouvera par la formule 1 :

$$\int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}$$

$$\left\{\frac{x^9}{10}+\frac{9x^7}{10.8}+\frac{9.7\,x^5}{10.8.6}+\frac{9.7.5.\,x^3}{10.8.6.4}+\frac{9.7.5.3\,x}{10.8.6.4.2}\right\}$$

$$+\frac{9.\ldots.1}{10.\ldots.2}\int.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exemple second. On propose de ramener l'intégrale $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1-x^2}}$ à celle de $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

On a ici

$m=11,\ldots n=2\ldots p=-1\ldots q=2\ldots a=1\ldots b=-1\ldots$

et $-m+in=-1$, ou $i=5$:

la formule 11 donne

$$\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}$$

$$\left\{\frac{1}{10x^{10}}+\frac{9}{10.8.x^8}+\frac{9.7}{10\ldots6x^6}+\frac{9.7.5}{10\ldots4x^4}+\frac{9.7.5.3}{10\ldots2x^2}\right\}$$

$$+\frac{9.7.\ldots.3}{10.\ldots.8}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Problème sixième.

308. Réduire l'intégration de $\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ à celle de $\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-\omega}$, ω étant un nombre entier.

Solution. Reprenons l'équation différentiée du problème précédent :

$$d.x^r(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = rx^{r-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + \frac{bpn}{q}x^{r+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1};$$

ajoutant aux deux membres le terme

$$\frac{anp}{q}x^{r-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1},$$

et réduisant, on aura

$$d.x^r(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + \frac{anp}{q}x^{r-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} = \left(r+\frac{pn}{q}\right)x^{r-1}dx(a+x^n)^{\frac{p}{q}};$$

et revenant de la différentielle à l'intégrale, on aura

$$\int x^{r-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{qx^r(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + anp\int x^{r-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}}{qr+pn}$$

Soit $r-m=1$, ou $r=m+1$: la formule deviendra

$$\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{qx^{m+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + anp\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}}{np+mq+q};$$

en mettant successivement $\frac{p}{q}-1, \frac{p}{q}-2, \frac{p}{q}-3$...&c. à la place de $\frac{p}{q}$ dans la formule précédente, on aura

$$\int x^m dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$$

$$= \frac{qx^{m+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} + an(p-q)\int x^m dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}-2}}{mq+np+q-nq}$$

$$\int x^m dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}-2}$$

$$= \frac{qx^{m+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-2} + an(p-2q)\int x^m dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}-3}}{mq+np+q-2nq}$$

Faisons ces substitutions dans la première formule, et désignons, comme dans le problème précédent, le coefficient du premier terme par A, celui du second par B, celui du troisième par C, ... &c. et nous aurons

$$\text{III.} \int x^m dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = qx^{m+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \left\{ \frac{1}{mq+np+q} + \frac{A.anp(a+bx^n)^{-1}}{mq+np-nq+q} + \frac{B.an(p-q)(a+bx^n)^{-2}}{mq+np-2nq+q} + \frac{C.an(p-2q)(a+bx^n)^{-3}}{mq+np-3nq+q} + \ldots \right\} + N.(p-(n-1)q)\frac{an}{q}\int x^m dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}-n}.$$

Exemple. On propose de réduire l'intégration

de $\int dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$ à celle de $\int dx\sqrt{1-x^2}$, on a ici

$m=9\ldots n=2\ldots p=5\ldots q=2\ldots a=1, b=-1$;

donc

$$\int dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = x\left\{\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{6} + \frac{5(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{6.4}\right\} + \frac{5.3}{6.4}\int dx\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ldots \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \ldots \&c.$$

auxquelles on ramène

$$\int \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \ldots\ldots \int \frac{dx}{x^{2m+1}\sqrt{1-x^2}}$$

ne sont pas algébriques, mais elles expriment des arcs de cercle ou des logarithmes (284); comme elles se présentent souvent, ainsi que quelques autres de même nature, nous allons joindre ici une table des plus simples de ces intégrales, qu'on vérifiera facilement par la différentiation.

$$\int \frac{dx}{a+x} = \log(a+x) + K.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = (\log x + \sqrt{a^2+x^2}) + K.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{2a}\log\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a} + K.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x.$$

De l'intégration par les séries.

359. Lorsque la fonction Xdx n'est pas susceptible d'une intégrale exacte, on développe en série la fonction X, et multipliant chaque terme du développement par dx, on n'aura plus à intégrer que des monomes, dont les intégrales réunies donneront une valeur approchée de $\int X dx + K$.

La fraction la plus simple qu'on puisse réduire en série est $\frac{1}{a+x}$,

il en résulte

$$\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \ldots\ldots$$

multipliant par dx, et intégrant, on a

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5} \ldots + K.$$

mais on sait d'ailleurs que

$$\int \frac{dx}{a+x} = \log.(a+x).$$

on aura donc

$$\log(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5} - \ldots + K$$

pour déterminer la constante K, on fera

$$x = 0,$$

et l'on aura

$$\log a = K,$$

donc $$\log(a+x) - \log a;$$

ou

$$\log\left(1+\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \ldots$$

résultat conforme à celui du n°

Prenons pour second exemple la fonction

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

que nous savons être l'arc du cercle dont le sinus est x, le rayon étant 1. Si on réduit en série

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

on aura

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \ldots$$

multipliant par dx, et intégrant, on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} + \ldots + K;$$

c'est-à-dire que l'arc dont le sinus est

$$x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \ldots\ldots$$

on trouvera que la constante à ajouter est zéro, parce que l'arc dont le sinus est zéro = aussi zéro.

Si on suppose que $x = 1$; on aura l'expression en série du quart de la circonférence ; savoir ,

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{3.5}{2.4.6.7} + \ldots \&c.$$

Cette expression sera d'autant plus approchée que l'on prendra plus de termes.

Veut-on avoir la longueur d'un arc par le moyen de sa tangente, on prendra la fonction $\frac{dx}{1+x^2}$ qui est la différentielle de l'arc dont la tangente est x : en développant en série $\frac{1}{1+x^2}$, on a

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots \&c.$$

Multipliant par dx et intégrant, on a

$$\text{Arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots + K.$$

La méthode d'intégration par les séries, peut être rendue plus générale et plus élégante par les considérations suivantes :

La formule différentielle $d.(xy)$ donne en l'intégrant $xy = \int.(y\,dx + x\,dy)$,

qu'on peut encore écrire

$$\int.y\,dx + \int.x\,dy :$$

donc $\int.y\,dx = xy - \int x\,dy.$

l'intégration de la formule $\int y\,dx$ est donc réduite à celle de $\int.x\,dy$: cette réduction s'appelle intégration par parties et est d'un grand usage dans le calcul intégral.

On peut mettre le terme $\int x\,dy$ sous la forme suivante :

$$\int x\,dx\,\frac{dy}{dx};$$

si on l'intègre par parties, il deviendra

$$\frac{x^2}{2}\frac{dy}{dx}-\int\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx};$$

on peut, par le même principe, écrire

$$\int\frac{x^2}{2}dx\,\frac{d^2y}{dx^2},$$

au lieu de

$$\int\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx},$$

et intégrant par parties, on aura

$$\frac{x^3}{2.3}\frac{d^2y}{dx^2}-\int\frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3},$$

et ainsi de suite : substituant toutes ces intégrales dans la formule $\int y\,dx=xy-\int x\,dy$, elle deviendra

$$\int y\,dx=yx-\frac{x^2}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{x^3}{2.3}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots$$

$$\pm\int\frac{x^p\,dx}{1.2\ldots p}\,\frac{d^py}{(dx)^p}.$$

Si on suppose que y est une fonction connue de x, qu'on désignera par X, dy pourra être désignée par $X'dx$, et par conséquent, $\frac{dy}{dx}$ par X' ; par la même raison on désignera $\frac{d^2y}{dx^2}$ par X'', $\frac{d^3y}{dx^3}$ par X'''...

et ainsi des autres : on aura donc

$$\int X dx = Xx - \frac{x^2}{2} X' + \frac{x^3}{2.3} X'' - \frac{x^4}{2.3.4} X''' \ldots \&c.$$

ou en supposant dx constante

$$\int X dx = Xx - \frac{x^2 dX}{2\,dx} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{2.3.4}{x^4}\frac{d^3X}{dx^3} + \ldots$$

Exemples. Soit $X = \frac{1}{a+x}$, on aura

$$X', \text{ ou } \frac{dX}{dx} = -\frac{1}{(a+x)^2}.$$

$$X'', \text{ ou } \frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{2}{(a+x)^3}.$$

$$X''', \text{ ou } \frac{d^3X}{dx^3} = \frac{2.3}{(a+x)^4} \ldots \&c.$$

donc

$$\int \frac{dx}{a+x}, \text{ ou } \log(a+x) = K$$

$$+ \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3.(a+x)^3} + \frac{x^4}{4(a+x)^4} + \ldots.$$

en faisant $x = 0$, on trouve $K = \log a$:

donc $\log(a+x) = \log a$

$$+ \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} + \frac{x^4}{4(a+x)^4} + \ldots. \&c.$$

Cette série sera d'autant plus convergente que x sera plus petit que a. On trouvera, par exemple, que le logarithme (hyperbolique) de

$$101 = 100 + 1 = \log 100 + \frac{1}{(101)} + \frac{1}{2(101)^2} + \ldots \&c.$$
$$= 4{,}6051\ldots + 0{,}0099. + 0{,}00004\ldots + \&c. = 4{,}61512\ldots$$

Nous observerons en terminant cet article, que le développement des intégrales en série ne doit être employé que lorsqu'il donne des séries convergentes, ce qui n'arrive pas toujours : il faut dans ce dernier cas chercher à rendre la série convergente, ou faire usage pour l'intégration, des méthodes particulières, qu'on trouvera dans les ouvrages des grands géomètres qui ont écrit sur le calcul intégral.

De l'intégration des fonctions logarithmiques et exponentielles.

360. On a supposé jusqu'ici, que dans la fonction $\int X dx$, X étoit une expression purement algébrique, ne contenant que la variable x, et des constantes : nous supposerons maintenant, qu'indépendamment de la variable x, X contient des quantités transcendantes, telles que des logarithmes et des exponentielles.

Soit $X = z \log x$, z étant une fonction algébrique de x et de constantes, désignons par V l'intégrale de $z dx$ ou $\int . z dx$. En intégrant par parties, on aura

$$\int . z dx . \log x = V \log x - \int V \frac{dx}{x} :$$

V ne renfermant point de transcendantes, la différentielle $V \frac{dx}{x}$ sera algébrique, et s'intègrera; supposons que $z = x^n$, on aura par la méthode précédente :

$$\int . x^n dx \log x = \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \int \frac{x^n dx}{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1} \log x - x^{n+1}}{n+1 \quad (n+1)^2} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left\{ \log x - \frac{1}{n+1} \right\} + K$$

lorsque $n=-1$, l'intégrale générale semble être en défaut, mais dans ce cas particulier la fonction proposée s'intègre directement; soit fait $\log x=y$, on aura

$$\frac{dx}{x}=dy : \text{et} \int.\frac{dx}{x}\log x=\int.y\,dy=\frac{y^2}{2}-K,$$

donc

$$\int\frac{dx}{x}\log x=\frac{(\log x)^2}{2}+K.$$

Supposons que $X=z(\log x)^n$: on aura

$$\int.z\,dx(\log x)^n=V(\log x)^n-\int nV\frac{dx}{x}(\log x)^{n-1} :$$

faisons l'intégrale de $V\frac{dx}{x}=T$: on aura

$$\int.V\frac{dx}{x}(\log x)^{n-1}=T(\log x)^{n-1}-n-1.\int T\frac{dx}{x}(\log x)^{n-2}.$$

soit l'intégrale de $T\frac{dx}{x}=S$: on aura

$$\int T\frac{dx}{x}(\log x)^{n-2}=S(\log x)^{n-2}-n-2\int S\frac{dx}{x}(\log x)^{n-3}$$

en continuant d'intégrer ainsi par parties, on parviendra à un dernier terme qui ne contiendra pas le facteur $\log x$, lorsque n est un nombre entier positif; son intégrale sera donc algébrique : là en réunissant les différens termes intégrés, l'intégrale proposée deviendra

$$\int z\,dx\,(\log x)^n=V(\log x)^n-nT(\log x)^{n-1}$$
$$+n.n-1\,S(\log x)^{n-2}-n.n-1.n-2R(\log x)^{n-3}+\ldots\ \&c.+K.$$

Soit par exemple $z = x^m$: on aura

$$\int x^m dx (\log)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$\left\{(\log x)^n - \frac{n}{m+1}(\log x)^{n-1} + \frac{n.n-1}{(m+1)^2}(\log x)^{n-2}\right.$$

$$\left. - \frac{n.n-1.n-2}{(m+1)^3}(\log x)^{n-3} + \ldots.\right\} + K.$$

Le seul cas qui échappe à la formule générale est celui où $m = -1$; mais alors on a

$$\int \frac{dx}{x}(\log x)^n = \frac{(\log x)^{n+1}}{n+1} + K.$$

Si n est négatif, la formule générale donne pour intégrale une série infinie, dans laquelle l'exposant de $\log x$ augmente sans cesse ; mais il est facile de ramener l'intégration de la formule $\int z dx (\log x)^{-n}$ à une forme dans laquelle l'exposant de $\log x$ ira en diminuant : il faut dans ce cas prendre l'intégrale par rapport au facteur $(\log x)^{-n}$, comme dans l'exemple suivant :

Soit $\frac{x^m dx}{(\log)^n}$: on peut mettre cette différentielle sous la forme $x^{m+1}\frac{dx}{x}(\log x)^{-n}$, et comme $\frac{dx}{x}$ est la différentielle de $\log x$, on aura en intégrant par parties

$$\int x^{m+1}\frac{dx}{x}(\log x)^{-n} = -\frac{x^{m+1}.(\log x)^{-n+1}}{n-1}$$

$$+ \frac{m+1}{n-1}\int x^m dx (\log x)^{-n+1}.$$

Ce dernier terme intégré de nouveau par parties, donnera

$$\int x^{m+1}\frac{dx}{x}(\log x)^{-n+1} = -\frac{x^{m+1}(\log x)^{-n+2}}{n-2} + \frac{m+1}{n-2}\int x^m dx(\log x)^{-n+2}.$$

Si en continuant d'intégrer ainsi par parties jusqu'à ce qu'on parvienne au terme $\int x^m dx(\log x)^{-1}$, et qu'on substitue ces intégrales, on aura

$$\int \frac{x^m dx}{(\log x)^n} = -x^{m+1}\left\{\frac{1}{n-1(\log x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1.n-2(\log x)^{n-2}} + \frac{(m+1)^2}{n-1.n-2.n-3(\log x)^{n-3}} + \ldots\right\} + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1.n-2\ldots.1)}\int \frac{x^m dx}{\log x} + K\ldots$$

L'intégrale proposée se réduit donc à celle de $\frac{x^m dx}{\log x}$: or, si on fait $x^{m+1} = u$, on aura

$m+1\log x = \log u$, et $(m+1)x^m dx = du$:

donc $$\int \frac{x^m dx}{\log x} = \int \frac{du}{\log u}$$

différentielle qu'on n'a pas encore pu intégrer.

361. Soit maintenant la formule exponentielle $X a^x dx$ qu'il s'agisse d'intégrer, on la décomposera dans les deux facteurs $a^x dx . X$. La différentielle de a^x étant $a^x dx \log a$, (285) il s'ensuit que l'intégrale de $a^x dx$ sera $\frac{a^x}{\log a}$: on aura donc

$$\int X a^x dx = \frac{X a^x}{\log a} - \int \frac{a^x dX}{\log a}\ldots.$$

si on fait

$$dX=X'dx, dX'=X''dx, \ldots dX^{n}=X^{n+1}dx \ldots \&c.$$

et qu'on continue l'intégration par parties, on trouvera cette série,

$$\int X a^x dx = \frac{1}{\log a} X a^x - \frac{1}{(\log a)^2} X' a^x$$

$$+ \frac{1}{(\log a)^3} X'' a^x - \frac{1}{(\log a)^4} X''' a^x + \ldots \&c.$$

$$\pm \frac{1}{(\log a)^n} \int X^{(n-1)} a^x dx.$$

Si X est une fonction rationnelle et entière de x, le nombre des quantités $X', X'', X''' \ldots$ sera limité, et la dernière $X^{(n-1)}$ sera une constante; le dernier terme $\int X^{(n-1)} a^x dx$ se changera en $X^{(n-1)} \int a^x dx$, dont l'intégrale est $X^{(n-1)} \frac{a^x}{\log x}$, ainsi la différentielle proposée sera intégrable.

Prenons pour exemple la différentielle $x^n a^x dx$; on a

$$X=x^n \ldots X'=nx^{n-1} \ldots X''=n.n-1x^{n-2} \ldots$$

$$X'''=n.n-1\,n-2\,x^{n-3} \ldots \&c.$$

donc

$$\int x^n a^x dx = a^x \left\{ \frac{x^n}{\log a} - \frac{n x^{n-1}}{(\log a)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{n.n-1\,x^{n-2}}{(\log a)^3} + \frac{n.n-1.n-2x^{n-3}}{(\log a)^4} + \ldots \pm \frac{n.n-1 \ldots 1}{(\log a)^n} \right.$$

Si on avoit e^x au lieu de a^x, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, on auroit

$$\int . x^n e^x dx = e^x \left\{ x^n - n x^{n-1} + n.n-1 x^{n-2} \right.$$

$$\left. - n.n-1.n-2x^{n-3} + \ldots + n.n-1 \ldots 1 \right\}$$

En intégrant d'abord le facteur $X\,dx$, dans la différentielle proposée $\int.X\,a^x\,dx$, et faisant l'intégrale de ce facteur $= A$, on a

$$\int.X\,a^x\,dx = A\,a^x - \log a \int A\,a^x\,dx :$$

si on suppose que

$$\int A\,dx = B \ldots \int.B\,dx = C \ldots \&c.$$

on aura

$$\int.X a^x\,dx = A\,a^x - \log a\,B\,a^x + (\log a)^2\,C\,a^x$$
$$-(\log a)^3\,D\,a^x + \ldots \pm (\log a)^n \int N a^x\,dx \ldots\ldots$$

Cette dernière formule donnera l'intégrale de $\int.x^n a^x dx$, lorsque n est un nombre négatif, car l'on a

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1.)x^{n-1}} - \frac{a^x \log a}{n-1.n-2x^{n-2}}$$
$$-\frac{a^x(\log a)^2}{n-1.n-2.n-3x^{n-3}} - \frac{a^x(\log a)^3}{n-1\ldots n-4x^{n-4}} - \ldots\ldots$$
$$+\frac{(\log a)^{n-1}}{n-1.n-2\ldots 1} \int. \frac{a^x dx}{x} \ldots$$

Si l'on suppose $a^x = u$, on aura

$$\log a\,a^x\,dx = du \ldots \log a = \log u :$$

donc
$$\int \frac{a^x\,dx}{x} = \int \frac{du}{\log u},$$

or nous venons de voir que cette dernière différentielle n'est pas intégrable; donc on ne peut pas obtenir, en un nombre fini de termes, l'intégrale de $\int x^n a^x dx$, lorsque n est un nombre entier négatif; mais dans ce dernier cas on la fait dépendre

de celle de $\int \frac{du}{\log u}$, ou $\int \frac{a^x dx}{x}$, qu'on intègre par les séries.

En effet, on sait (107) que

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{x^2}{2}(\log a)^2 + \frac{x^3}{2.3}(\log a)^3 + \ldots$$

donc

$$\int a^x \frac{dx}{x} = \log x + x\log a + \frac{x^2}{2.2}(\log a)^2 + \frac{x^3(\log a)^3}{2.3.4} + \frac{x^4(\log a)^4}{2.3.4.4} + \ldots + K.$$

De l'intégration des fonctions circulaires.

362. On a vu (286), 1°. que $d.\sin\varphi = d\varphi\cos\varphi$;

donc $\int d\varphi\cos\varphi = \sin\varphi + K$;

2°. $d.\cos\varphi = -d\varphi\sin\varphi$;

donc $\int. d\varphi\cos\varphi = K - \cos\varphi$:

3°. $d.\ \text{tang}\,\varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$,

donc $\int.\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \text{tang}\,\varphi + K$...&c.

d'où on peut conclure que

$$\int. d\varphi\{A + B\sin\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin 3\varphi \ldots \&c.\}$$
$$= A\varphi + B\cos\varphi + \frac{C}{2}\cos 2\varphi + \frac{D}{3}\cos 3\varphi + \ldots\ldots$$
$$\int. d\varphi\{A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \ldots.\}$$
$$= A\varphi - B\sin\varphi - \frac{C}{2}\sin 2\varphi - \frac{D}{3}\sin 3\varphi - \ldots\ldots$$

il suit aussi de ce qui précède, que

$$\int. d\varphi \cos\varphi . \sin^m \varphi + \frac{\sin^{m+1}}{m+1} .$$

$$\int. d\varphi . \sin\varphi . \cos^m \varphi = -\frac{\cos^{m+1}\varphi}{m+1} :$$

car si on désigne sin φ par x, on aura

$$d\varphi \cos\varphi = dx, \text{ et } \int d\varphi \cos\varphi \sin^m . \varphi = \int x^m . dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} + K = \frac{\sin^{m+1}\varphi}{m+1} + K.$$

On trouvera par un calcul semblable, l'intégrale de

$$\int. d\varphi \sin\varphi \cos^m \varphi = K - \frac{\cos^{m+1}\varphi}{m+1}.$$

Proposons-nous maintenant d'intégrer les cinq différentielles suivantes :

1° $\int. \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$. Si on multiplie le numérateur et le dénominateur par sin φ, on aura

$$\int. \frac{d\varphi \sin\varphi}{1 - \cos^2 \varphi} ;$$

et désignant cos φ par x, on a

$$-\int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2}\int. \frac{dx}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x} :$$

donc

$$\int. \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi \text{ (trig.)},$$

2°. $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int \frac{d\varphi \cos\varphi}{1-\sin^2\varphi}$;

et en faisant $\sin\varphi = x$, on a

$$\frac{\frac{1}{2}\int dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}\int dx}{1-x} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}:$$

donc

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} = \log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

3°. $\int \frac{d\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} = -\int \frac{dx}{x}$;

en faisant

$$\cos\varphi = x = ; -\log x + K:$$

donc

$$\int \frac{d\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} = K - \log\cos\varphi.$$

4°. $\int \frac{d\varphi \cos\varphi}{\sin\varphi} = \int \frac{dx}{x}$,

en faisant $\sin\varphi = x$, $= \log x + K$:

donc

$$\int \frac{d\varphi \cos\varphi}{\sin\varphi} = \log\sin\varphi + K.$$

5°. $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \int \frac{d\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{\sin\varphi.\cos\varphi}$

$$= \int \frac{d\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} + \int \frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} = \log\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \log\operatorname{tang}\varphi + K.$$

Une fonction différentielle de sinus et cosinus sera donc intégrée lorsqu'on l'aura ramenée à quelqu'une des précédentes.

363. 1°. Soit proposé d'intégrer $\int . d\varphi \sin^n \varphi$; n étant un nombre entier positif : on mettra l'intégrale sous cette forme :

$$\int d\varphi \sin \varphi . \sin^{n-1} \varphi :$$

et intégrant le premier facteur, on aura

$$\int d\varphi \sin^n \varphi = -\cos \varphi \sin^{n-1} \varphi + \int d\varphi \cos^2 \varphi \sin^{n-2} \varphi :$$

mettant à la place de $\cos^2 \varphi$ sa valeur $1 - \sin^2 \varphi$, et transposant, il vient

$$\int . d\varphi \sin^n \varphi = -\frac{1}{n} \cos \varphi \sin^{n-1} \varphi + \frac{n-1}{1} \int . d\varphi \sin^{n-2} \varphi :$$

on aura aussi par un calcul semblable,

$$\int . d\varphi \sin^{n-2} \varphi = -\frac{1}{n-2} \cos \varphi \sin^{n-3} \varphi + \frac{n-3}{n-2} \int . d\varphi \sin^{n-4} \varphi :$$

en continuant d'intégrer par parties de proche en proche, on parviendra à un dernier terme qui sera $\int d\varphi \sin \varphi, = -\cos \varphi$ si n est impair ; ou $\int . d\varphi \sin^{n-n} \varphi = \text{Arc } \varphi$, si n est pair.

Exemple premier.

$$\int d\varphi \sin^3 \varphi = -\frac{1}{3} \cos \varphi \sin^2 \varphi - \frac{2}{3.1} \cos \varphi + K.$$

Exemple second.

$$\int . d\varphi \sin^4 \varphi = -\frac{1}{4} \cos \varphi \sin^3 \varphi - \frac{3}{4.2} \cos \varphi . \sin \varphi + \frac{3.1}{4.2} . \text{Arc} \varphi + K.$$

$$+ \frac{3.1}{4.2} . \text{Arc } \varphi + K.$$

2°. Soit proposé d'intégrer $\int . d\varphi \cos^n \varphi$: on mettra l'intégrale sous la forme $\int d\varphi \cos^{n-1} \varphi$, comme dans l'intégration précédente, et intégrant par parties, on a

$$\sin \varphi \cos^{n-1} \varphi + n - 1 \int \sin^2 \varphi \cos^{n-2} \varphi :$$

mettant à la place de $\sin^2\varphi$ sa valeur $1-\cos^2\varphi$, et transposant, on a

$$\int d\varphi \cos^n\varphi = \frac{1}{n}\sin\varphi\cos^{n-1}\varphi + \frac{1}{n-1}\int d\varphi\cos^{n-2}\varphi :$$

ce dernier terme intégré donnera à son tour

$$\frac{1}{n-1}\sin\varphi\cos^{n-3}\varphi + \frac{n-3}{n-2}\int d\varphi\cos^{n-4}\varphi :$$

on continuera ainsi de proche en proche jusqu'à $\int d\varphi\cos\varphi = \sin\varphi$, si n est impair, ou jusqu'à $\int d\varphi = \text{Arc}\varphi$, si n est pair.

Exemple premier.

$$\int d\varphi\cos^3\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{2}{3.1}\sin\varphi + K.$$

Exemple second.

$$\int d\varphi\cos^4\varphi = \frac{1}{4}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3}{4}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{3.1}{4.2}\text{Arc}\varphi$$

3°. Soit proposé d'intégrer $\int.\frac{d\varphi}{\sin^n\varphi}$. Si dans la première des formules précédentes, on met $-n$ à la place de n, on aura

$$\int\frac{d\varphi}{\sin^n\varphi} = \frac{1}{n.}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n+1}\varphi} + \frac{n+1}{n}\int\frac{d\varphi}{\sin^{n+2}\varphi} :$$

faisons $n+2=m$, et nous aurons

$$\int.\frac{d\varphi}{\sin^m\varphi} = -\frac{1}{m-1}\frac{\cos\varphi}{\sin^{m-1}\varphi} + \frac{m-2}{m+1}\int.\frac{d\varphi}{\sin^{m-2}\varphi} :$$

donc

$$\int.\frac{\sin^n\varphi}{d\varphi} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1}\varphi} + \frac{n-2}{n-1}\int.\frac{d\varphi}{\sin^{n-2}\varphi} :$$

on passera ensuite de

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^{n-2}\varphi} \text{ à } \int \frac{d\varphi}{\sin^{n-4}\varphi},$$

et ainsi de suite jusqu'à $\int . d\varphi = \text{Arc } \phi$ si n est pair, ou jusqu'à $\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$, que nous savons intégrer (362), si n est impair.

Exemple premier.

$$\int . \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} = -\frac{1}{2}\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{1}{2} \log \text{tang} \frac{1}{2}\phi + K.$$

Exemple second.

$$\int . \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi} = -\frac{1}{3}\frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} - \frac{2}{3.1}\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{2}{3.1} \text{Arc} \phi + K.$$

4°. $\int . \frac{d\varphi}{\cos^n \varphi}$ se traitera de la même manière que la précédente, et il est aisé de voir sans en faire le calcul, que l'on aura

$$\int . \frac{d\varphi}{\cos^n \varphi} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin \varphi}{\cos^{n-1} \varphi} + \frac{n-2}{n-1} \int . \frac{d\varphi}{\sin^{-2} \varphi} \ldots$$

5°. Soit proposée la formule

$$\int . \frac{d\varphi \cos^n \varphi}{\sin^m \varphi} :$$

nous distinguerons deux cas, lorsque n est impair, $= 2i + 1$, et lorsque n est pair $= 2i$.

Si n est impair, on aura

$$\int . \frac{d\varphi \cos^{2i+1} \varphi}{\sin^m \varphi} = \int . \frac{d\varphi \cos \varphi}{\sin^m \varphi} (1 - \sin^2 \varphi)^i,$$

en développant le binome et multipliant chaque terme par

$$\frac{d\varphi \cos\varphi}{\sin^m \varphi} = \frac{d.\sin\varphi}{\sin^m \varphi},$$

on aura une somme de termes intégrables chacun séparément, quelle que soit m.

Si n est un nombre pair, alors

$$\int \frac{d\varphi \cos^n \varphi}{\sin^m \varphi} = \int \frac{d\varphi (1 - \sin^2 \varphi)^{\frac{n}{2}}}{\sin^m \varphi},$$

qui étant développée s'intégrera facilement par la formule $\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$, ou par $\int d\varphi \sin^k \varphi$.

6°. $\int \frac{d\varphi \sin^n \varphi}{\cos^m \varphi}$ se traitera comme la précédente, et sera, par conséquent, susceptible d'intégration, quelle que soit la valeur de m et n, pourvu qu'ils soient des nombres entiers.

7°. Soit la différentielle $d\varphi \sin^n \varphi \cos^m \varphi$, qu'il s'agit d'intégrer : on écrira $d\varphi \sin\varphi \cos^m \varphi \sin^{n-1}$; et intégrant par parties, on aura

$$\int d\varphi \sin^n \varphi \cos^m \varphi = -\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} \varphi \sin^{n-1} \varphi + \frac{n-1}{m+1} \int d\varphi \cos^{m+2} \varphi \sin^n \varphi :$$

mettant dans ce dernier terme $1 - \sin^2 \varphi$ à la place de $\cos^2 \varphi$, et réunissant les termes semblables, on a

$$\int d\varphi \sin^n \varphi \cos^m \varphi = -\frac{1}{m+n} \cos^{m+1} \varphi \sin^{n-1} \varphi + \frac{n-1}{m+n} \int d\varphi \cos^m \varphi \sin^{n-2} \varphi.$$

Ce dernier terme intégré par parties, donnera

$$\int d\varphi \sin^{n-2}\varphi \cos^m\varphi = -\frac{1}{m+n-2}\cos^{m+1}\varphi \sin^{n-3}\varphi$$

$$+\frac{n-3}{m+n-2}\int d\varphi \cos^m\varphi \sin^{n-4}\varphi :$$

en continuant d'intégrer ainsi et de substituer, on aura l'intégrale

$$\int d\varphi \sin^n\varphi \cos^m\varphi = -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}\varphi \sin^{n-1}\varphi$$

$$-\frac{n-1.\cos^{m+2}\varphi \sin^{n-3}\varphi}{m+n.m+n-2}$$

$$-\frac{n-1.n-3\cos^{m+1}\varphi \sin^{n-5}\varphi}{m+n.m+n-2.m+n-4}-\ldots \&c.$$

jusqu'au terme

$$-\frac{n-1.n-3\ldots 2}{m+n.m+n-2\ldots m+1}\cos^{m+1}\varphi.$$

Si n est un nombre impair, et jusqu'au terme

$$-\frac{n-1.n-3\ldots 1}{m+n.m+n-2\ldots m+2}\int d\varphi \cos^m\varphi,$$

si n est pair.

364. Si au lieu d'intégrer par rapport au facteur $d\varphi \sin\varphi \cos^m\varphi$, on intégroit par rapport au facteur $d\varphi \cos\varphi \sin^n\varphi$; on auroit la formule

$$\int d\varphi \sin^n\varphi \cos^m\varphi = \frac{1}{m+n}\sin^{n+1}\varphi \cos^{m-1}\varphi$$

$$+\frac{m-1\sin^{n+2}\varphi \cos^{m-3}\varphi}{n+m.n+m-2}+\ldots \&c.$$

jusqu'au terme

$$+\frac{m-1.\,m-3\ldots\ldots 2}{n+m.\,n+m-2\ldots n+1}\sin^{n+1}\phi,$$

si m est impair, jusqu'au terme

$$+\frac{m-1.\,m-3\ldots 1}{n+m.\,n+m-2\ldots\ldots n+2}\int d\phi\sin^{n}\phi,$$

si m est pair.

8°. Enfin si on a à intégrer $\int\frac{d\phi}{\sin^{n}\phi\cos^{m}\phi}$, on la déduira des deux formules précédentes, en y changeant à la fois $+n$ en $-n$, et $+m$ en $-m$, et l'on aura par la première

$$\int\frac{d\phi}{\sin^{n}\phi\cos^{m}\phi}=\frac{1}{m+n}\frac{1}{\sin^{n+1}\phi\cos^{m-1}\phi}$$

$$+\frac{n+1}{m+n}\int\frac{d\phi}{\sin^{n+2}\phi\cos^{m}\phi};$$

d'où il résultera

$$\int\frac{d\phi}{\sin^{n+2}\phi\cos^{m}\phi}=-\frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^{n+1}\phi\cos^{m-1}\phi}$$

$$+\frac{m+n}{n+1}\int\frac{d\phi}{\sin^{n}\phi\cos^{m}\phi};$$

si on met n à la place de $n+2$, on aura

$$\int\frac{d\phi}{\sin^{n}\phi\cos^{m}\phi}=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{\sin^{n-1}\cos^{m-1}\phi}$$

$$+\frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{d\phi}{\sin^{n-2}\phi\cos^{m}\phi};$$

par la seconde des deux formules précédentes, on parviendra à la suivante :

$$\int \frac{d\phi}{\sin^n \phi \cos^m \phi} = \frac{1}{m-1} \frac{d\phi}{\sin^{n-1} \phi \cos^{m-1} \phi} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{d\phi}{\sin^n \phi \cos^{m-1} \phi}.$$

Par le moyen de la première, on diminue successivement l'exposant de $\sin \phi$, et l'on parviendra bientôt à $\int \frac{d\phi}{\cos^m \phi}$, (362) ou à $\int \frac{d\phi}{\sin \phi \cos^m \phi}$, par le moyen de la seconde, on diminuera successivement l'exposant de $\cos \phi$, dans $\int \frac{d\phi}{\sin \phi \cos^m \phi}$, et on la ramènera à $\int \frac{d\phi}{\sin \phi}$, ou à $\int \frac{d\phi}{\sin \phi \cos \phi}$, qu'on sait intégrer.

365. Toutes les différentes fonctions différentielles contenant des sinus, que nous venons d'intégrer, sont comprises dans la formule

$$\int d\phi \sin^n \phi \cos^m \phi,$$

en donnant à m et n toutes sortes de valeurs entières, positives ou négatives, ou zéro, et comme toutes ces fonctions sont intégrables, il s'ensuit que la formule $\int d\varphi \sin^n \varphi \cos^m \varphi$ est intégrable, toutes les fois que m et n sont des nombres entiers, positifs ou négatifs.

Lorsque m et n sont des nombres entiers positifs, il seroit peut-être plus commode de changer en sinus et en cosinus d'arcs multiples les puissances des sinus et cosinus $\sin \varphi$, $\cos^m \varphi$.

on a vu (111) que

$$\sin^2 \varphi = A + B \sin \varphi + C \sin 2\varphi + D \sin 3\varphi + \text{... \&c.}$$

et

$$\cos^m\varphi = A' + B'\cos\varphi + C'\cos 2\varphi + D'\cos 3 + \ldots.$$

donc $\sin^n\varphi . \cos^m\varphi$ ne contiendra plus que des termes de la forme

$$\sin . m\varphi . \cos n\varphi ;$$

mais par les formules connues de la Trigonométrie,

$$2 . \sin m\varphi \times \cos n\varphi = \sin \overline{m+n} . \varphi + \sin \overline{m-n}\varphi :$$

donc

$$\sin^n\varphi\cos^m\varphi = a + b\sin M\varphi + c\sin M'\varphi + d\sin M''\varphi + \ldots \&c.$$

et par conséquent

$$\int . d\varphi \sin^n\varphi \cos^m\varphi$$

$$= a\varphi - \frac{b}{M}\cos M\varphi - \frac{c}{M'}\cos M'\varphi - \frac{d}{M''}\cos M''\varphi \ldots$$

On pourroit encore faire $\sin\varphi$, ou $\cos\varphi = x$ dans la formule proposée, et l'on auroit

$$\int . d\varphi \sin^n\varphi \cos^m\varphi = \int . x^n dx (1 - x^2)^{\frac{m-1}{2}},$$

ou

$$\int . x^m dx (1 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} :$$

or ces deux formules sont évidemment intégrables algébriquement; 1°. si n ou m est un nombre entier positif impair; 2°. si la somme des deux exposans m et n est un nombre entier négatif pair, à moins que l'un des deux ne fût $= -1$: dans ce dernier cas l'intégrale de la différentielle proposée dépendroit des logarithmes; 3°. la proposée pourra être rendue rationnelle si un des deux exposans m ou n est un nombre entier positif ou négatif impair, ou si la somme des deux est un nombre entier positif ou négatif pair. Toutes ces considérations sont une suite de tout ce qui a été dit (351 et suiv.)

366. Si les deux exposans m et n sont tous les deux des nombres pairs, on aura recours aux formules du n°. (357). Par la formule I on ramènera l'intégrale

$\int x^n dx (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$ à celle de $\int dx (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$;

et par la formule III on ramènera cette dernière à

$\int dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale est

$$\tfrac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \tfrac{1}{2} \text{Arc } \varphi + K.$$

Si m et n étoient négatifs, on feroit usage de la formule II.

Il résulte de toutes ces considérations qu'on peut intégrer facilement les différentielles où il entre des sinus et des cosinus lorsqu'elles sont susceptibles d'intégration, et qu'on peut les ramener aux méthodes déjà prescrites pour l'intégration des fonctions algébriques.

367. Occupons-nous maintenant des formules qui renferment des arcs de cercle. On a vu (286) que la différentielle d'un arc est égale à la différentielle du sinus divisée par le cosinus; en sorte que si on désigne le sinus de l'arc φ par x, on a

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

donc réciproquement,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc } \varphi, = \text{Arc}$$

dont le sinus est x, que l'on écrit plus simplement $=$ Arc sin x.

On a vu aussi qu'en représentant par x le cosinus de l'arc φ, on a

$$d\varphi = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

donc $$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varphi = \text{Arc cos } x.$$

Si la tangente de l'arc φ est appelée x, on a

$$d\varphi = \frac{dx}{1+x^2};$$

donc $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \varphi = \text{Arc tang } x.$$

Les intégrales de ces arcs de cercle, quoique réelles, se présentent souvent sous la forme imaginaire ; par exemple, $\int \frac{dx}{1+x^2}$ peut s'intégrer de la manière suivante :

En décomposant le dénominateur $1+x^2$ en ses deux facteurs simples imaginaires

$$1+x\sqrt{-1}, \quad 1-x\sqrt{-1},$$

on forme les deux fractions

$$\frac{A\,dx}{1+x\sqrt{-1}} + \frac{B\,dx}{1-x\sqrt{-1}};$$

et si après avoir déterminé $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, on intègre, on aura

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}};$$

mais d'un autre côté nous savons que $\int \frac{dx}{1+x^2}$ = Arc tang x : donc l'arc réel dont la tangente est x est aussi exprimé en logarithmes de quantités imaginaires (113). Nous nous sommes servis de cette transformation pour les intégrations des fractions différentielles rationnelles.

Pareillement, si l'on suppose $x = z\sqrt{-1}$, on aura

$$dx = dz\sqrt{-1}, \text{ et } \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+z^2};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ ou Arc sin } x = \sqrt{-1}\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$= \sqrt{-1}\log\{z+\sqrt{1+z^2}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}\};$$

et réciproquement,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\{x+\sqrt{1+x^2}\} = \frac{\text{Arc sin } x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}.$$

En général, les différentielles qu'on intègre par les arcs de cercle peuvent aussi s'intégrer par les logarithmes; mais alors l'intégrale se présente sous une forme qui contient des imaginaires; réciproquement les différentielles qu'on intègre par les logarithmes peuvent aussi s'intégrer par les arcs de cercle sous une forme qui contient des imaginaires: l'on a vu (113) comment on pouvoit transformer celles de ces quantités qui contiennent des imaginaires en d'autres qui soient réelles.

Application du calcul intégral à la quadrature des courbes, à leur rectification, à la quadrature des surfaces courbes et à l'évaluation des solides qu'elles comprennent.

368. On a vu dans la Géométrie (234) que la quadrature du cercle consiste à faire un quarré égal en surface au cercle donné; la quadrature de l'ellipse, ou d'une portion d'ellipse, de parabole, d'hyperbole...&c. consistera aussi à faire un quarré égal à un espace compris entre un arc de la courbe, les deux ordonnées qui passent par l'extrémité de cet arc et la partie de l'axe comprise entre les ordonnées. Le problême des quadratures est le plus simple du Calcul Intégral, comme celui des tangentes est le plus simple du Calcul Différentiel.

Soit une courbe AMM', dont l'équation est

$$y = Fx;$$

Fig. 71. désignons l'espace compris entre l'arc AM, l'ordonnée PM et l'abscisse AP, par E; si l'abscisse AP augmente d'une quantité infiniment petite $Pp = dx$, l'ordonnée $PM = y$ deviendra

$$pm = y + dy,$$

et l'espace $AmpA$ sera augmenté du trapèze infiniment petit $pmMP$, dont l'expression algébrique est

$$(2y + dy)\frac{dx}{2} = y\,dx + \frac{dy\,dx}{2}.$$

Le terme $\frac{dy\,dx}{2}$ exprime la surface du triangle Mmr, qui est infiniment petit du second ordre,

lorsque les deux ordonnées PM, pm sont infiniment proches; il doit donc être négligé comparativement au terme $y\,dx$ qui est infiniment petit du premier ordre : donc l'accroissement infiniment petit que reçoit l'espace APM, lorsque x devient $x+dx$, sera représenté par $y\,dx$.

L'espace APM ayant été représenté par E, l'élément de l'espace sera désigné par dE; on aura donc l'équation

$$dE = y\,dx,$$

ou en passant de la différentielle à l'intégrale,

$$E = \int . y\,dx :$$

ainsi pour avoir l'expression algébrique de l'espace APM, il faut prendre la valeur de y en x dans l'équation de la courbe, la multiplier par dx et intégrer selon les règles prescrites.

Supposons que la courbe AM est une parabole dont l'équation est

$$y = \sqrt{px},$$

on aura

$$y\,dx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx :$$

donc

$$\int . y\,dx = \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3} + K = \tfrac{2}{3} yx + K :$$

on déterminera la constante K en observant que lorsque $x = 0$, l'espace $APM = 0$; donc on a l'équation

$$0 = 0 + K;$$

c'est-à-dire que $K = 0$: ainsi l'espace parabolique compris entre un arc AM qui part du sommet, l'ordonnée et l'abscisse correspondante est les deux tiers du rectangle formé par l'ordonnée et

l'abscisse : cette courbe paroît être la première que l'on ait quarrée ; sa quadrature, connue long-temps avant la découverte des nouveaux calculs, est due à Archimède.

L'équation aux paraboles de tous les genres est

$$y^{m+n} = a^m x^n \text{ (198), et } y = (a^m x^n)^{\frac{1}{m+n}};$$

donc
$$\int . y\,dx = \int . (a^m x^n)^{\frac{1}{m+n}} \times dx$$
$$= \frac{m+n}{m+2n} (a^m x^{m+2n})^{\frac{1}{m+n}} = \frac{m+n}{m+2n} y x.$$

369. Cherchons la différentielle de la surface par le moyen de la méthode des limites. Soit la courbe AMM', et deux ordonnées MP, $M'P'$, perpendiculaires à l'axe AP ; tirons la corde MM', et construisons le rectangle $PQSP'$, qui a $PP' = \Delta x$ pour hauteur, et PS ou AB pour base. Cette ligne AB est prise pour unité de mesure de longueur ; en sorte que le quarré $ABCD$ est l'unité de mesure des surfaces.

La surface du trapèze curviligne $PMM'P'$ est la différence finie de l'espace $APM = E$; et son rapport avec le rectangle $PQSP'$ sera exprimé algébriquement par $\frac{\Delta E}{1 . \Delta x}$.

La surface du trapèze formé par les deux ordonnées MP, $M'P'$, et par la corde, MM' sera exprimé par $(2y + \Delta y)\frac{\Delta x}{2}$, et son rapport avec le rectangle $PQSP'$ sera

$$\frac{\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x}{\Delta x} = y + \frac{\Delta y}{2} :$$

Cela posé ;

Il est visible que le rapport $\frac{\Delta E}{\Delta x}$ est $> y + \frac{\Delta y}{2}$, parce que le trapèze curviligne dont l'arc de la courbe est un des côtés, est plus grand que le trapèze rectiligne formé par la corde : plus l'ordonnée $P'M'$ approchera de PM, plus les deux rapports approcheront de l'égalité ; mais ils ne seront rigoureusement égaux que lorsque $P'M'$ se confondant avec PM, Δy sera zéro, ce qui signifie que les limites de ces deux rapports sont égales : pour désigner ces deux limites, on écrira $\frac{dE}{dx}$ pour la première, et on fera $\Delta y = 0$ dans l'expression du second rapport ; on aura ainsi l'équation $\frac{dE}{dx} = y$, ce qui indique que la limite du rapport $\frac{\Delta E}{\Delta x}$ est égale à l'ordonnée de la courbe, remontant ensuite de la limite au rapport des quantités, on aura la valeur de E en fonction de x : l'équation $\frac{dE}{dx} = y$ mène directement à la suivante :

$$dE = y\,dx,$$

et celle-ci donne en intégrant,

$$E = \int . y\,dx ;$$

ce qui est la formule des quadratures trouvée par les principes de Leïbnitz.

370. La détermination de la différentielle de la surface, d'après les principes de Leïbnitz, suppose qu'on néglige des quantités infiniment petites du second ordre ou du troisième, &c. elle est par conséquent susceptible des mêmes difficultés que l'on a

faites contre le Calcul Différentiel (290). On peut en dire autant de la méthode inverse des limites; c'est pourquoi il importe de faire voir qu'on peut traiter le Calcul Intégral, et notamment ses applications aux courbes, sans rien faire évanouir : on donnera ainsi aux résultats de l'analyse, la rigueur qui caractérise les principes des anciens géomètres. Nous démontrerons préalablement le lemme suivant, dont nous ferons le plus grand usage.

Lemme.

371. Si l'on a trois expressions ordonnées suivant les puissances de x ou de Δx,

Fig. 73.
$$Y = A + B\Delta x + C\overline{\Delta x}^2 + D\overline{\Delta x}^3 + \ldots \&c.$$
$$Z = A' + B'\Delta x + C'\overline{\Delta x}^2 + D'\overline{\Delta x}^3 + \ldots \&c.$$
$$V = A'' + B''\Delta x + C''\overline{\Delta x}^2 + D''\overline{\Delta x}^3 + \ldots \&c.$$

et que sans connoître la valeur de Z on sache qu'elle se trouve toujours comprise entre les valeurs de Y et de V, quelle que soit la valeur de Δx; si les deux séries extrêmes ont un certain nombre de leurs premiers termes égaux entr'eux, la série de Z aura nécessairement le même nombre de ses premiers termes égaux aux termes correspondans des autres séries. Si l'on a par exemple

$$A = A'',$$

on aura aussi

$$A = A'.$$

Supposons trois courbes mM, $m'M'$, $m''M''$, rapportées aux mêmes axes et à la même origine des coordonnées. Soient Y, Z, V, trois ordonnées de ces courbes $P'M$, $P'M'$, $P'M''$, correspondantes à la même abscisse $AP + PP' = x + \Delta x$, AP

étant pris pour l'abscisse x, et PP' pour Δx; puisque l'on a

$$A = A'',$$

il s'ensuit qu'au point R, où l'on a

$$\Delta x = 0,$$

les deux courbes mM, $m''M''$ se coupent ou se touchent; et puisque la courbe $m'M'$ doit toujours être comprise entre les deux autres, il s'ensuit qu'elle doit passer par le point R: donc à ce point les trois ordonnées Y, Z, V sont égales; mais lorsque $\Delta x = 0$, on a

$$Y = A,\ Z = A',\ V = A'';$$

donc si $A = A''$, et que la valeur de Z doive être constamment entre celle de Y et celle de V, l'on aura nécessairement

$$A' = A = A''.$$

372. Les mêmes choses étant supposées que dans le n°. (369), on peut regarder l'espace APM ou E comme une fonction de l'abscisse correspondante (260), et le désigner par ϕx: l'espace $AP'M'$ sera une fonction semblable de $x + \Delta x$, on aura donc Fig. 71.

$$E' = \phi(x + \Delta x), \text{ et } E' = E, \text{ ou } \Delta E = \phi(x + \Delta x) - \phi x$$

$$= \Delta x \frac{dE}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} \frac{d^2E}{dx^2} + \ldots \&c.$$

Le rectangle $PMRP'$, que nous avons nommé dans la Géométrie (321), rectangle déficient, sera égal à $PM \times PP'$, et son expression algébrique sera

$$y \Delta x.$$

Le rectangle $P'M'R'P$, ou le rectangle excédent

sera égal à $P'M' \times PP'$, et son expression algébrique sera

$$y' \Delta x ;$$

si on met à la place de y' sa valeur qui est

$$y + \Delta x \frac{dy}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots \&c:$$

le rectangle excédent sera exprimé par

$$y \Delta x + \Delta x^2 \frac{dy}{dx} + \ldots$$

Or quelle que soit la courbe proposée, on se convaincra facilement que si les ordonnées vont en augmentant ou en diminuant depuis PM jusqu'à $P'M'$, le trapèze curviligne $PMM'P'$ sera dans les deux cas plus grand que le rectangle déficient, et moindre que le rectangle excédent; donc il sera toujours nécessairement enfermé entre ces deux limites. Si l'on représente le rectangle déficient par Y, (1) le trapèze curviligne par Z, et le rectangle excédent par V, on aura

$$Y = y \Delta x$$

$$Z = \Delta x . \frac{dE}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} \frac{d^2 E}{dx^2} + \ldots \&c.$$

$$V = y \Delta x + \overline{\Delta x}^2 \frac{dy}{dx} + \ldots \&c.$$

mais puisque le premier terme de la valeur de V égale le premier terme de Y, et que d'un autre

(1) Si les ordonnées alloient en diminuant depuis PM jusqu'à $P'M'$, le rectangle déficient seroit représenté par V, et le rectangle excédent par Y.

côté la valeur de Z est toujours comprise entre la valeur de Y et celle de V quelle que soit la valeur de Δx, on a nécessairement

$$\frac{dE}{dx} = y :$$

donc le dernier rapport entre le rectangle excédent, le rectangle déficient et le trapèze curviligne est un rapport d'égalité : de l'équation précédente, on déduit

$$dE = y\,dx,$$

et en intégrant,

$$E = \int y\,dx.$$

373. Si les ordonnées partent d'un même point, comme dans les spirales ou les courbes polaires, l'aire de la courbe sera toujours fonction de l'abscisse correspondante ; pour la déterminer on mènera les deux ordonnées CM, CP, et on décrira du centre C et des deux rayons $CM = y$, $CP = y'$, les deux arcs Mm, Pp : la surface du secteur curviligne CMP sera visiblement plus grande que celle du secteur circulaire CMm, et moindre que celle du secteur CPp. Or si on désigne par E la surface de la courbe ACM, et par ϕ l'arc de cercle AN décrit d'un rayon $= 1$, cet arc sera l'abscisse de l'ordonnée CM, et E sera une fonction de ϕ : on aura par conséquent Fig. 40. 41.

$$NS = \Delta\phi\ CMP = \Delta E = \Delta\phi . \frac{dE}{d\phi} + \frac{\Delta\phi^2}{2}\frac{d^2E}{d\phi^2} + \ldots \&c.$$

$$CMm = \frac{y^2\,\Delta\phi}{2}, \text{ et } CPp = \frac{y'^2 . \Delta\phi}{2};$$

mais $$y' = y + \Delta\phi\frac{dy}{d\phi} + \ldots \&c.$$

on aura donc

$$Y = \frac{y^2 \Delta \phi}{2},$$

$$Z = \Delta\phi . \frac{dE}{d\phi} + \ldots \&c.$$

$$V = \frac{y^2 \Delta \phi}{2} + \ldots \&c.$$

Or le premier terme de la valeur de V est le même que celui de Y, et d'un autre côté la valeur de Z doit être constamment renfermée entre celle de Y et V; donc on a (Lemme n°. 371.)

$$\frac{dE}{d\phi} = \frac{y^2}{2}, \text{ ou } dE = \frac{y^2 d\phi}{2},$$

et enfin

$$E = \int \frac{y^2 d\phi}{2}.$$

Exemple premier. Soit le rayon du cercle

Fig. 2. $AX = a$, $A'P = x$, $P'M = y = \sqrt{a^2 - x^2}$;

réduisant le radical en série, on a

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{a^3}$$

$$- \frac{1}{16}\frac{x^6}{a^5} - \frac{5}{128}\frac{x^8}{a^7} - \ldots \&c.$$

donc

$$y\,dx = a\,dx - \frac{1}{2}\frac{x^2 . dx}{a} - \frac{1}{8}\frac{x^4\,dx}{a^3}$$

$$- \frac{1}{16}\frac{x^6\,dx}{a^5} - \frac{1}{128}\frac{x^8\,dx}{a^7} - \ldots \&c.$$

donc

$$\int y\,dx = ax - \frac{x^3}{2.3a} - \frac{x^5}{5.8a^3} - \frac{x^7}{7.16a^5} - \frac{5x^9}{9.128a^7} \ldots\ldots + k.$$

La constante $k = 0$, parce que la surface du quart du cercle $X'MY = 0$ lorsque $x = 0$.

Lorsque $x = a$, la série qu'on vient de trouver donne le quart de la surface du cercle ; on a pour lors l'espace

$$X'AY = a^2\left\{1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} \ldots\text{&c. à l'infini.}\right\}$$

Dans l'ellipse, on a

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

donc

$$\int y\,dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

ce qui indique que la surface de l'ellipse est à celle du cercle décrit sur le grand axe, comme le petit axe est au grand axe : d'où il suit que la quadrature du cercle donne celle de l'ellipse.

L'équation à l'hyperbole rapportée aux asymptotes est

$$xu = \frac{a^2 + b^2}{4} : \quad (186)$$

Fig. 24.

si l'hyperbole est équilatère, on a

$$b^2 = a^2,$$

et faisant la puissance $= m^2$, l'équation devien-

dra $z u = m^2$, ou en changeant z en x, et u en y, $yx = m^2$; on aura donc

$$\int y\,dx = m^2 \int \frac{dx}{x} = m^2 \log x + K.$$

Si on compte les espaces depuis l'origine C, on aura

$$\int y\,dx = 0, \text{ lorsque } x = 0,$$

ce qui donne l'équation $0 = m^2 \log 0 + K$: mais on sait que le log de zéro est l'infini *négatif* : donc $K =$ l'infini, et, par conséquent, l'espace compris depuis l'ordonnée ZM, l'abscisse AZ, l'asymptote Ck, et la branche hyperbolique, continuée à l'infini = l'infini.

Si on transporte l'origine des abscisses au point i, milieu de la diagonale CN, et qu'on prenne la ligne $ci = m$ pour l'unité : on aura

$$Cz = Ci + iz = 1 + x :$$

donc l'équation aux asymptotes pour l'hyperbole équilatère, rapportée au point i pour origine des abscisses, est

$$y(1+x) = 1 :$$

ainsi

$$\int y\,dx = \int \frac{dx}{1+x}$$

$$= \int \{dx - x\,dx + x^2\,dx - x^3\,dx + x^4\,dx \ldots\}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \text{ \&c.}$$

$$= \log(1+x) \text{ (102).}$$

on n'ajoute pas de constante, parce que

$$\log(1+x) = 0, \text{ lorsque } x = 0.$$

L'espace asymptotique $MZIA$, est le loga-

rithme naturel ou de Nepper, de l'abscisse iz, parce que l'hyperbole est équilatère; mais si on vouloit avoir l'aire asymptotique de l'hyperbole EB, dont les asymptotes font entr'elles un angle $FCD = \varphi$, il faudroit multiplier la formule $\int.ydx$ et le second membre de l'équation intégrée par $\sin\varphi$: ainsi le sinus de l'angle φ tient lieu de module. Dans les logarithmes des tables, le module est Fig. 24.

$$0,43429448.$$

Or, dans les tables des sinus naturels, ce nombre répond à l'angle de 25° 44′ 25″. Donc les logarithmes ordinaires représentent les aires asymptotiques d'une hyperbole dont la puissance est 1, et dont l'angle des asymptotes est de 25° 44′ 25″.

Dans la cycloïde on a

$$dy = dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}} \quad (308): \qquad \text{Fig 37.}$$

si on intègre par partie la formule $\int y\,dx$, on a

$$xy - \int x\,dy :$$

substituant dans le dernier terme la valeur de dy, on a

$$\int x\,dy = \int.dx\sqrt{2ax-x^2}:$$

l'intégrale de ce dernier terme représente visiblement la surface de la partie du cercle générateur, correspondante à l'abscisse x : donc la surface du segment de cycloïde renfermé entre l'arc BF, l'ordonnée FH et l'abscisse BH, est égale au rectangle $FH \times HB$, moins l'espace circulaire BKH : il suit de-là que l'espace extérieur BOF = l'espace circulaire BKH.

Pour avoir la surface totale de la cycloïde, on

supposera $y = AD$, = la demi circonférence du cercle générateur $= a\pi$: on fera

$$x = 2a:$$

donc $$ABD = 2a^2\pi - \frac{a^2\pi}{2};$$

et, par conséquent,

$$ABC = 4a^2\pi - a^2\pi = 3a^2\pi:$$

c'est-à-dire, que la surface entière de la cycloïde est triple du cercle générateur.

Soit l'équation de la conchoïde rapportée au rayon vecteur BM, et à l'angle MBD,

Fig. 29. $$y = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a \quad (196):$$

on aura

$$y^2 = \frac{b^2}{\cos^2\varphi} \pm \frac{2ab}{\cos\varphi} + a^2:$$

et

$$\int y^2 \frac{d\varphi}{2} = \frac{b^2}{2}\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \pm ab\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{a^2}{2}\int d\varphi$$

$$= \frac{b^2}{2}\operatorname{tang}\varphi \pm ab \log\operatorname{tang}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{a^2\varphi}{2}.$$

En prenant le second terme avec le signe +, on a la surface DBM; et en le prenant avec le signe —, on a la surface dBm:
donc

$$DBM - dBm, \text{ ou } MDdm$$
$$= 2ab \log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Soit l'équation des spirales $y = A\varphi^n$ (206), dans laquelle $A = \frac{1}{(2\pi)^n}$, et φ un arc de cercle

dont le rayon est r, on aura

$$\int \frac{y^2 d\varphi}{2r} = \int \frac{A^2 \varphi^{2n} d\varphi}{2r} = \frac{A^2 \varphi^{2n+1}}{(4n+2)r}; \qquad \text{Fig. 40.}$$

après une révolution, on a

$$\varphi = 2\pi r;$$

donc l'espace

$$CDNA = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \times \frac{(2\pi r)^{2n+1}}{(4n+2)r};$$

dans la spirale d'Archimède, on a $n=1$:

donc $$CDNA = \frac{\pi r^2}{3};$$

c'est-à-dire, que l'espace $CDNA$ est le tiers du cercle $ABMEA$.

De la rectification des courbes.

374. La rectification d'une courbe consiste à trouver une ligne droite égale en longueur à la courbe donnée. Toute ligne courbe peut être regardée comme un polygone composé d'un nombre infini de côtés infiniment petits. Chacun de ces côtés, qu'on peut regarder comme un élément de la courbe, est l'hypothénuse d'un triangle rectangle Mmr, dont un des côtés est dx, et le second dy: ainsi le petit arc de la courbe Mm, que nous désignerons par Fig. 71.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ou

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

et passant de la différentielle à l'intégrale, on aura

$$s = \int. dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} :$$

D'où il suit que pour trouver une ligne droite égale à un arc donné d'une courbe, il faut différentier l'équation de la courbe, prendre la valeur du rapport $\frac{dy}{dx}$, la substituer dans le radical, et intégrer la fonction différentielle

$$dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

qui sera de la forme $X dx$, ou $Y dy$.

Soit la seconde parabole cubique, dont l'équa-
Fig. 34. tion est $y^3 = p x^2$:

en la différentiant, on a

$$3 y^2 dy = 2 p x dx :$$

d'où on déduit

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{4 p^2 x^2}{9 y^4} = \frac{4p}{9y}.$$

Cette valeur substituée dans le radical, donne

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{\frac{9y + 4p}{9y}} :$$

on tire aussi de l'équation de la courbe

$$dx = \frac{3}{2} dy \sqrt{\frac{y}{p}} :$$

donc

$$\int. dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \int. \frac{dy}{3} \sqrt{4 + \frac{9y}{p}} :$$

l'intégrale de cette expression est visiblement

$$\frac{p}{27}\left(4+\frac{9y}{p}\right)^{\frac{3}{2}}+K:$$

et comme l'intégrale doit être zéro, lorsque $y=0$, on déterminera $K=-\frac{8p}{27}$: ainsi l'arc de la seconde parabole cubique répondant à l'ordonnée y, est égal à

$$\frac{p}{27}\left(4+\frac{9y}{p}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8p}{27}=\frac{8p}{27}\left\{\left(1+\frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}.$$

375. Cherchons maintenant la différentielle de l'arc, par le moyen de la méthode des limites: si l'on suppose que l'ordonnée $P'M'$ est à une distance finie de PM, on aura la corde Fig. 71.

$$MM'=\sqrt{\overline{\Delta x^2}+\overline{\Delta y^2}}:$$

et le rapport de la corde MM' à la perpendiculaire

$$MR=\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}:$$

ce rapport est plus petit que celui de l'arc MM', à MR, parce que l'arc est toujours plus grand que la corde qui le soutend: plus le point M' approchera du point M, plus les deux rapports approcheront de l'égalité, en sorte qu'ils seront égaux lorsque la différence de l'abscisse sera nulle: mais le rapport de la corde MM' à MR a pour limite le rapport de la tangente à la soutangente (291); qui, à cause des triangles semblables, est égal au rapport de la normale à l'ordonnée: donc la limite

du rapport de l'arc MM' à MR, est aussi égale au rapport de la normale à l'ordonnée.

Désignons par s l'arc AM, MM' sera désigné par Δs, et le rapport de l'arc MM' à $MR = \frac{\Delta x}{\Delta s}$: la limite de ce rapport est exprimée par $\frac{ds}{dx}$; l'expression de la normale est

$$y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \quad (287):$$

on a donc

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}, \text{ ou } ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}:$$

et revenant de la différentielle à l'intégrale

$$s = \int . dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}:$$

comme par la méthode de Leibnitz.

376. Pour déterminer la différentielle de l'arc avec la même rigueur que celle des surfaces; nous partirons du principe d'Archimède démontré dans la géométrie (198): suivant lequel deux lignes courbes ou composées de lignes droites, ayant leurs concavités tournées du même côté et terminées aux mêmes points; celle qui renferme les autres est la plus longue; d'où il suit que l'arc MM' est plus grand que la corde, et moindre que la somme des deux tangentes Mr, $M'r$ menées aux deux extrémités de l'arc et comprises entre ces extrémités et leur point d'intersection r. Si du point r on suppose une perpendiculaire abaissée sur $P'Q'$, on aura visiblement $rQ' > rM'$ (géom. 5e):

donc $Mr + rQ' > Mr + rM'$:

et par conséquent la tangente MQ' est > que l'arc MM'.

Si on suppose une perpendiculaire abaissée du point M' sur PQ, on aura $M'Q <$ que la corde MM'; donc, à plus forte raison, $M'Q <$ Arc MM': mais l'on a $M'Q = M'Q''$, donc la tangente $M'Q''$, est < arc MM'.

Cela posé, l'expression de la tangente MQ' est

$$\Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

elle sera donc une fonction de l'abscisse $AP = x$: nous la désignerons par φx: la tangente $M'Q''$ sera, dans la même supposition

$$\varphi(x + \Delta x) = \varphi x + \Delta x \varphi' . x + \ldots \text{ \&c.}$$

Désignons l'arc AM par S, on aura

$$MM' = \Delta s, = \Delta x \frac{ds}{dx} + \frac{\overline{\Delta x^2}}{2} \frac{d^2 s}{dx^2} + \ldots .$$

Ainsi les valeurs de MQ', Arc MM', MQ'' donneront les trois équations suivantes :

$$MQ' = \varphi x$$

$$\text{Arc } MM' = \Delta x \frac{ds}{dx} + \ldots \text{ \&c.}$$

$$M'Q'' = \varphi x + \Delta x \varphi' x + \ldots \text{ \&c.}$$

or, le premier terme de la valeur de $M'Q''$ est le même que celui de la valeur de MQ', et d'un autre côté l'arc MM' doit toujours être compris entre $M'Q$, ou $M'Q''$, et MQ': donc (lemme n°. 371.)

$$\Delta x \frac{ds}{dx} = \varphi x = \Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

et par conséquent

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Exemples. Dans le cercle dont l'équation est $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, on a

$$dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

différentielle qui n'est intégrable par aucune des méthodes connues; mais si on réduit en série le

Fig. 2. binome $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, qu'on multiplie par dx, et qu'on intégre, on aura

$$\text{l'arc } Y'M = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3a^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5a^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7a^6} + \cdots.$$

Si on fait $x = a = 1$, et qu'on pousse le développement jusqu'à ce que les termes qu'on néglige soient très-petits, on aura une ligne droite égale, à peu de chose près, au quart de la circonférence : en la multipliant par 4, on aura le rapport de la circonférence au rayon.

Dans la parabole ordinaire, dont nous ferons l'équation $y = px^2$, on a

$$\int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \int dx\,(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}},$$

et par la formule III (358), on a

$$\int dx\,(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}x\,(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}};$$

pour

pour avoir l'intégrale de ce dernier terme, on fera

$$\sqrt{1+4p^2x^2} = 2px + z, \qquad \text{Fig. 15.}$$

d'où on déduit

$$x = \frac{1-z^2}{4pz} \quad \therefore dx = -\frac{1}{4p}\frac{dz(1+z^2)}{z^2},$$

et enfin

$$\frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}} = -\frac{1}{2p}\frac{dz}{z};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}} = -\frac{1}{2p}\log z$$

$$= -\frac{1}{2p}\log\left(\sqrt{1+4p^2x^2} - 2px\right)$$

$$= +\frac{1}{2p}\log\left(2px + \sqrt{1+4p^2x^2}\right),$$

on aura donc

$$\text{l'arc } AM = \frac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4p}\log(2px + \sqrt{1+4p^2x^2}) + K.$$

Dans l'ellipse on a

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

la différentielle de l'arc sera donc

$$dx\,\frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}; \qquad \text{Fig. 16.}$$

si on suppose le demi-grand axe $= 1$, et la demi-

excentricité $\sqrt{1-b^2} = c$, on aura

$$\int . dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \int . dx \, \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} :$$

intégrale qu'on ne peut avoir par les règles précédentes ; il faut donc réduire en série un des radicaux : nous choisirons celui du numérateur ; mais pour avoir des séries très-convergentes, il faut distinguer deux cas ; lorsque c est une fraction très-petite, et lorsqu'il ne diffère pas beaucoup de l'unité. Dans le premier cas, on aura

$$\text{Arc } KM = \int . \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} c^2 x^2 - \frac{1.1}{2.4} c^4 x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} c^6 x^6 \ldots . \right\}$$

or il est visible que chaque terme de cette série multipliée par $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ rentre dans la formule générale $\int . \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, qu'on peut faire dépendre de $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (357), et l'on vient de voir que cette dernière est la rectification de l'arc de cercle qui répond à l'abscisse x ; on connoît donc toutes quantités qui entrent dans la valeur de l'arc KM, et l'on voit en même temps que la rectification de l'ellipse dépend de celle du cercle.

Dans le second cas, on mettra la fonction

$$\frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

sous la formule suivante :

$$\sqrt{\frac{1-cx}{1-x}}\times\sqrt{\frac{1+cx}{1+x}};$$

mais on a

$$\frac{cx+1}{x+1}=c+\frac{1-c}{x+1};$$

la différentielle proposée se réduit donc à

$$\int.dx\sqrt{\frac{1-cx}{1-x}}\times\sqrt{c+\frac{1-c}{x+1}};$$

développons le second radical suivant les puissances de $1-c$, et faisant pour abréger $\frac{1-c}{c}=n$, on aura à intégrer

$$dx\sqrt{\frac{1-cx}{1-x}}+\sqrt{c}$$

$$\left\{1+\frac{1}{2}\frac{n}{1+x}-\frac{1.1}{2.4}\frac{n^2}{(1+x)^2}+\frac{1.1.1}{2.4.6}\frac{n^3}{(1+x)^3}-\ldots\right\}$$

série très-convergente, puisque n est une fraction très-petite : on intégrera chaque terme séparément, en rendant rationnelle la fonction $\sqrt{\frac{1-cx}{1-x}}$, alors l'intégrale de chaque terme de la série ne dépendra que des arcs de cercle, ou des logarithmes (355).

L'équation de l'hyperbole étant $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, faisant $a=1$, la différentielle de son arc est

$$dx\frac{\sqrt{(1+b^2)x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}};$$

si on fait $1 + b^2 = c$; la différentielle ci-dessus sera exprimée par

$$dx \frac{\sqrt{c^2x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

et se développera en série, comme pour l'ellipse.

Dans la cycloïde on a

$$dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}} \text{ (308)};$$

donc

$$dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx\sqrt{\frac{2a}{x}};$$

et intégrant Arc $BF = 2\sqrt{2ax}$; c'est-à-dire, qu'un arc de cycloïde est égal au double de la corde correspondante du cercle générateur, et, par conséquent, la cycloïde entière égale quatre fois le diamètre du cercle générateur.

Soit pour dernier exemple l'équation

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}},$$

qui est celle de la courbe, qu'une droite donnée a glissant entre deux lignes faisant entr'elles un angle droit, toucheroit continuellement : on aura

$$dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx\sqrt[3]{\frac{a}{x}};$$

et par conséquent

$$\int dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{ax^2}.$$

Des surfaces courbes des solides de révolution.

377. Si l'on suppose que la courbe AMM' tourne autour de l'axe des abscisses AP', il est visible, 1°. que toutes les ordonnées de la courbe perpendiculaire à l'axe AP' décrivent des cercles dont ces mêmes ordonnées sont les rayons : 2°. que l'arc de la courbe MM', compris entre deux ordonnées MP, MP' décrira, une zone ou surface courbe, qui sera d'autant plus petite, que l'arc MM' sera petit ; 3°. si on suppose cet arc infiniment petit, et égal à $\sqrt{dx^2+dy^2}$, la zone sera un petit cône tronqué, dont la surface sera Fig. 71.

$$2\pi y\,dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

ce sera l'élément de la surface courbe du solide engendré par la révolution de la courbe AM, autour de l'axe AP : donc l'expression de la surface totale sera

$$2\pi\int y\,dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

378. Soit S la surface décrite par l'arc AM ; ΔS sera la surface décrite par l'arc MM' : la surface du cône tronqué, décrite par la corde MM', sera exprimée par

$$2\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2};$$

et celle du cylindre, décrite par la ligne

$$QS=2\pi\Delta x;$$

on a donc pour le rapport entre ces deux surfaces

$$(1)\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}},$$

et pour la limite de ce rapport

$$y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

on a aussi (2)

$$\frac{\Delta s}{2\pi\Delta x}$$

pour le rapport de la surface de la zone, décrite par l'arc MM' à la surface cylindrique, décrite par la ligne QS et $\frac{ds}{2\pi dx}$ pour la limite de ce rapport. Le rapport (2) est $>$ que le rapport (1); mais ces deux rapports approcheront d'autant plus de l'égalité, que le point M' sera plus près du point M; c'est-à-dire que le rapport (2) a aussi pour limite

$$y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

on aura donc

$$\frac{ds}{2\pi dx}=y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

ou

$$s=2\pi\int dy\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\ldots$$

929. Déterminons encore cet élément, par une méthode plus rigoureuse. On vient de voir que la corde MM', et l'arc qu'elle soutend décrivent

l'une un cône tronqué, et l'autre une zone curviligne. La tangente MQ' décrira aussi un cône tronqué, et l'on voit évidemment que la surface de la zone décrite par l'arc MM' sera plus grande que celle du cône déficient, décrite par la corde MM', et moindre que celle du cône excédent, décrite par la tangente MQ': or on sait par les élémens de géométrie que la surface d'un cône tronqué est égale à son apothême multiplié par la moitié de la somme des circonférences des deux bases; donc la surface déficiente sera exprimée par Fig. 73.

$$2\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

et la surface excédente par

$$2\pi\left(y+\frac{\Delta x}{2}\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Désignons la première par X, la seconde par V, et la surface de la zone par Z. Développons en série les expressions des deux apothêmes MM', MQ', en mettant préalablement à la place de Δy sa valeur $\Delta x\frac{dy}{dv}+p$; p désigne la somme de tous les termes du développement qui suivent le premier; nous ne développerons qu'un seul terme de chaque série, parce que c'est le seul qu'on ait besoin de connoître; on aura donc

$$MM'=\Delta x\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+\ldots\ldots\&c.$$

et

$$MQ'=\Delta x\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}:$$

donc

$$Y = 2\pi y \Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \ldots\ldots \&c.$$

$$Z = \Delta x \frac{ds}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.$$

$$V = 2\pi y \Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \ldots \&c.$$

or les développemens des deux surfaces entre lesquelles est comprise celle qu'on cherche, commencent par le même terme, donc (lemme n° 371.) on a

$$\frac{ds}{dx} = 2\pi y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

et par conséquent

$$s = 2\pi \int y\, dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Exemples. Dans la sphère dont le rayon est a, on a

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

donc

$$y\, dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = a\, dx,$$

et par conséquent

$$\int = 2\pi a x \ldots;$$

Si l'on suppose $x = a$, on a

$$2\pi a^2$$

pour la surface de la moitié de la sphère: donc

celle de la sphère entière sera $4\pi a^2 = 4$, grands cercles de la sphère, ou le produit de l'axe entier par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

Dans la parabole, on a

$$2y\,dy = p\,dx,$$

ou

$$dx = \frac{2y\,dy}{p}\,2\pi \int . y\,dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$= \frac{2\pi}{p} \int . 2y\,dy \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{4}} = \frac{-\pi}{3p}\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + K;$$

si on fait $y = 0$, on doit avoir la surface $= 0$; donc

$$K = -\frac{4\pi p^2}{24} = -\frac{\pi p^2}{6}.$$

Dans l'ellipse dont l'équation est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2):$$

on a

$$dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx\,\frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,(376):$$

donc l'élément de la surface de l'ellipsoïde de révolution sera

$$\frac{2b}{a}\pi \int . dx \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\frac{x^2}{a^2}}.$$

Soit $a^2 - b^2 = c^2$, l'expression précédente deviendra

$$\frac{2bc\pi}{a^2}\int dx\sqrt{\frac{a^4}{c^2}-x^2}:$$

or, il est visible que cette intégrale est celle de la surface d'un cercle, dont le rayon est $\frac{a^2}{c}$: donc si on représente la surface de ce cercle par $\frac{a^4\pi}{c^2}$, la surface entière de l'ellipsoïde alongé, ou du solide, engendré par une ellipse tournant autour de son grand axe, sera $\frac{2a^2b\pi}{c}$.

Si l'ellipse tournoit sur son petit axe, elle décriroit un ellipsoïde applati (semblable à la figure de la terre): on auroit l'élément de sa surface, en mettant dans la précédente b à la place de a, et réciproquement, ce qui donnera

$$\frac{2acx}{b^2}\int.dx\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+x^2}:$$

soit $\frac{b^4}{c^2}=m^2$, et $\sqrt{m^2+x^2}+z$;

on en déduit

$$x=\frac{m^2-z^2}{2z}\quad dx=-dz\left(\frac{m^2+z^2}{z^2}\right)\ldots$$

$$\int.dx\sqrt{m^2+x^2}$$

$$=\frac{m^4-z^4}{4z^2}-m\log\frac{m^2+z^2}{2z}=\frac{m^2-z^2}{2z}-m\log z$$

$$=x\sqrt{m^2+x^2}-m\log\left(\sqrt{m^2+x^2}-x\right):$$

donc on a

$$\frac{2acπ}{b^2}\int dx\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+x^2}=\frac{2acπ}{b^2}x\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+x^2}$$

$$=\frac{2b^2aπ}{c}\log\frac{c}{b^2}\left(x+\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+x^2}\right):$$

si on fait $x=b$, on aura la surface entière de l'ellipsoïde applati

$$=4a^2π+\frac{4ab^2π}{c}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right):$$

et si $b=a$, on a la surface de la sphère $=4a^2π$, comme ci-dessus.

Cubature des solides de révolution.

380. Si l'on suppose le solide de révolution décomposé en une infinité de tranches parallèles entre elles, et d'une hauteur infiniment petite; chaque tranche pourra être considérée comme un élément du solide, et si on désigne par y le rayon de la base de chaque tranche, et sa hauteur par dx, on aura $πy^2dx$ pour la solidité de l'élément; donc la solidité totale sera $π\int y^2dx$. Si on veut la chercher par la méthode des limites, on appellera T le solide engendré par l'espace APM dans sa révolution autour de l'axe AP: ce solide a pour différence le solide engendré par le trapèze curviligne $PP'M'M$; il sera donc exprimé par ΔT, et son rapport avec le cylindre engendré par le rectangle $PP'QS=\frac{\Delta T}{π\Delta x}$ (1). Le cône oblique engendré par le trapèze rectiligne Fig. 71.

$$PP'M'M - \frac{\pi \Delta x}{3}\{y^2 + yy' + y'^2\} \text{ (géom. 535)}$$

$$= \frac{\pi \Delta x}{3}\{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2\}.$$

Le rapport entre la solidité de ce cône tronqué et celle du cylindre engendré par le rectangle $PP'QS$, est

$$\frac{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}{3} \text{ (2)}.$$

la limite de ce rapport est y^2 : le rapport (1) est $>$ que le rapport (2), mais ces deux rapports approcheront d'autant plus de l'égalité, que le point M' sera plus près du point M, et ne seront rigoureusement égaux, que lorsque Δy et Δx seront zéro : c'est-à-dire que pour lors on a

$$\frac{dT}{\pi\, dx} = y^2, \text{ ou } dT = \pi y^2 dx,$$

et par conséquent

$$T = \pi \int . y^2 dx.$$

Soit enfin Y le cylindre engendré par le rectangle $PP'RS$, que nous nommerons le cylindre déficient. Soit V le cylindre engendré par le rectangle $PP'M'R'$ que nous nommerons cylindre excédent. Soit T le solide engendré par l'espace APM, ΔT sera le solide engendré par le trapèze curviligne $PP'M'M$: et comme T est une fonction de x, on aura

$$\Delta T = \Delta x . \frac{dT}{dx} + \ldots\ldots \text{ \&c.}$$

Le cylindre déficient sera exprimé par $\pi y^2 \Delta x \ldots$

Le cylindre excédent, par $\pi y^2 \Delta x$: on aura donc

$$Y = \pi y^2 \Delta x,$$

$$\Delta T = \Delta x . \frac{dT}{dx} + \ldots . \&c.$$

$$V = \pi y^2 \Delta x + \ldots . \&c.$$

et puisque les premiers termes de Y et V sont les mêmes, et que d'un autre côté la valeur de ΔT doit être toujours comprise entre celles d'Y et de V, on aura (lemme n° 371.)

$$\frac{dT}{dx} = \pi y^2 \text{ ou } dT = \pi y^2 dx,$$

et intégrant $T = \pi \int y^2 dx$.

Exemples. Dans la sphère on a

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

en supposant l'origine des abscisses au sommet du diamètre ; donc

$$T = \frac{3\pi a x^2 - \pi x^3}{3} :$$

et si on suppose $x = 2a$, on aura la solidité de la sphère $= \frac{4\pi a^3}{3}$ = la surface multipliée par le tiers du rayon.

Dans le paraboloïde, on a

$$y^2 = px :$$

donc

$$\pi \int y^2 dx = \frac{\pi p x^2}{2} = \frac{1}{2} \pi y^2 x,$$

c'est-à-dire que la solidité du paraboloïde est la moitié du cylindre circonscrit.

Dans l'ellipsoïde alongé, on a

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

et par conséquent

$$T = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{3ax^2 - x^3}{3}\right):$$

donc la solidité totale $= \frac{4\pi a b^2}{3}$: on aura celle de celle de l'ellipsoïde applati en mettant b à la place de a, et a à la place de b, ainsi la solidité de l'ellipsoïde alongé, est à celle de l'ellipsoïde applati, $\therefore b : a$.

CHAPITRE SECOND.

De l'intégration des différentielles à plusieurs variables.

381. Soit une fonction quelconque des deux variables x, y, que nous désignerons par $F(x,y)$: d'après les règles de la différentiation, établies n°. (275) ; la différentielle de cette fonction sera composée de deux sortes de termes, les uns multipliés par dx, les autres multipliés par dy. Soit, par exemple, la fonction $xy^2 + x^2y + x^3$; sa différentielle sera

$$(2xy + x^2)\,dy + (y^2 + 2xy + 3x^2)\,dx.$$

Si on désigne la somme de tous les termes qui multiplient dy par M, et la somme de tous les termes qui multiplient dx par N, la différentielle proposée

pourra se mettre sous la forme $M\,dy + N\,dx$, dans laquelle M et N sont appelés les coefficients différentiels de la fonction ; ainsi l'on aura

$$d.F(x,y) = M\,dy + N\,dx,$$

et par conséquent

$$F(x,y) = \int.(M\,dy + N\,dx),$$

ou $$\int.M\,dy + \int N\,dx.$$

Le terme $M\,dy$ est la différentielle de la fonction, en ne faisant varier que y, et le terme $N\,dx$ est la différentielle de la même fonction, prise en ne faisant varier que x.

On ne peut intégrer que les fonctions qui sont des différentielles exactes, comme en arithmétique on ne peut extraire les racines que des nombres qui sont des puissances parfaites : or, pour qu'une fonction différentielle, telle que $M\,dy + N\,dx$, soit une différentielle exacte, il faut qu'il y ait entre les coefficients M, N, certaines relations que nous allons faire connoître.

382. En développant $F(x+k, y+o)$, que nous avons représentée par z, selon les puissances de k, et o, (301) on a eu

$$z + k\left(\frac{dz}{dx}\right) + o\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + ko\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \frac{o^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \ldots\ldots \&c.$$

et si on eût mis dx, dy, à la place de k et o, ce qui est absolument égal, les deux termes

$$dx\left(\frac{dz}{dx}\right), dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

seroient ceux que nous désignons ici par

$$N\,dx + M\,dy;$$

ainsi, ces deux termes forment une différentielle exacte. Le coefficient différentiel $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ n'est autre chose que le coefficient différentiel de $\frac{dz}{dx}$, ou de N, différentié par rapport à dy; il pourra donc être désigné par $\frac{dN}{dy}$, selon la notation établie (301): mais le même coëfficient $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ peut être considéré comme le coëfficient différentiel de $\frac{dz}{dy}$, ou de M, différentié par rapport à x: car pour former ce coëfficient, il faut prendre la fonction z et la différentier d'abord par rapport à x, et différentier ensuite cette différentielle première, par rapport à y: la première différentiation donnera Ndx, la seconde donnera

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)dx\,dy:$$

mais comme il n'est pas possible de faire les deux differentiations à-la-fois, et que rien n'exige qu'on commence par une plutôt que par l'autre; il est évident qu'on parviendra au même résultat en commençant la différentiation par y, et ensuite par x; comme en arithmétique il est indifférent de multiplier un nombre, d'abord par a, et ensuite par b, ou de commencer la multiplication par b, et ensuite par a (1).

(1) Dans presque tous les livres élémentaires on suppose, sans le démontrer, 1°. que le produit de deux nombres

Si

Si on différentie la fonction z en faisant varier y, on aura

$$M\,dy\,;$$

ce terme différentié de nouveau en faisant varier x, donne

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)dy\,dx\,;$$

donc on a

$$\frac{dM}{dx}=\frac{dN}{dy}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

c'est-à-dire que si $M\,dy+N\,dx$ est la différentielle exacte d'une fonction de x et y, la différentielle de M prise en ne faisant varier que x doit être égale à la différentielle de N prise par rapport à y : l'équation (1) est appelée l'équation de condition.

Exemples. 1°. Soit $x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy)$, qui est la différentielle de $x^m y^n$: on a

$$M=nx^m y^{n-1}\ldots.$$

$$N=my^n x^{m-1}\ldots\quad\frac{dM}{dx}=nmy^{n-1}x^{m-1}\ldots,$$

et

$$\frac{dN}{dy}=n.m\,x^{m-1}y^{n-1}.$$

---

demeure le même quoiqu'on change l'ordre des facteurs; c'est-à-dire que $ab=ba$: 2°. qu'on peut multiplier entre eux, dans tel ordre qu'on voudra, plusieurs membres, sans que leur produit change ; par exemple $abc=acb=bac=bca=cab=cba$... D'Alembert a fait sentir la nécessité de démontrer ces propositions. (Opuscules, t. 8.) Legendre en a donné une démonstration rigoureuse (Essai sur la théorie des nombres, page 1).

2°. Soit $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2+x^2}$, qui est la différentielle de l'arc. tang $\frac{x}{y}$: on a

$$M = -\frac{x}{y^2+x^2} \ldots N = \frac{y}{y^2+x^2} \ldots$$

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{1}{y^2+x^2} + \frac{2x^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2},$$

et $$\frac{dN}{dy} = \frac{1}{y^2+x^2} - \frac{2y^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}.$$

383. Lorsque l'équation de condition est remplie, il est facile d'intégrer une fonction différentielle à deux variables.

En effet, si on ne considère la différentielle de $F(x, y)$ ou de z que par rapport à y, on a

$$\frac{dz}{dy}\,dy = M\,dy :$$

donc l'intégrale de $\frac{dz}{dy}\,dy$, par rapport à dy, ou $z = \int . M\,dy +$ une constante qui peut être fonction de x, puisque x a été supposée constante dans la différentiation. Nous représenterons cette fonction de x par X; et comme on prend les intégrales tantôt par rapport à y, tantôt par rapport à x, nous désignerons les deux intégrations partielles par les deux signes $\int^{y}$, $\int^{x}$. Ainsi on aura

$$z = \int^{y} . M\,dy + X, \text{ ou } z = \int^{x} . N\,dx + Y :$$

on déterminera X par la condition suivante :

$$\frac{dz}{dx}\,dx = N\,dx ;$$

mais $\frac{dz}{dx}\,dx =$ aussi $d^x.\int^y M\,dy + dX$, donc on aura

$$dX = N\,dx - d^x.\int^y M\,dy;$$

et en intégrant en x,

$$X = \int.(N\,dx - d^x.\int^y M\,dy).$$

Chaque signe d'intégration se rapporte à la somme de tous les termes qu'il embrasse.

On peut abréger l'expression en représentant $\int^y.M\,dy$ par u, on aura

$$d^x.\int^y M\,dy = \frac{du}{dx}\,dx,$$

et par conséquent

$$X = \int^x \left(N - \frac{du}{dx}\right) dx,$$

et $$z = \int^y.M\,dy + \int^x \left(N - \frac{du}{dx}\right) dx + k.$$

Exemples. On demande l'intégrale de la fonction

$$dz = \left(\frac{2y^3 - 3xy^2 - x^3}{(y-x)^2} + \frac{x^2}{a}\right) dy$$
$$+ \left(\frac{3x^2y - 2x^3 + y^3}{(y-x)^2} + \frac{2xy}{a}\right) dx.$$

On commencera par s'assurer que $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$: on intégrera ensuite le premier terme en regardant x comme constante; et puisqu'il ne contient d'autre variable que y, on y appliquera immédiatement les méthodes indiquées dans le premier chapitre ; on trouvera pour intégrale

$$\frac{y^3 + x^3}{y - x} + \frac{x^2 y}{a} - x^2 + X:$$

pour déterminer X, on prendra la valeur de N, on en retranchera la différentielle en x, de l'intégrale qu'on vient de prendre en y, et l'on aura la différentielle de $dX = +2x\,dx$; donc

$$X = +x^2 + k,$$

et par conséquent

$$z = \frac{y^3 + x^3}{y - x} + \frac{x^2 y}{a} + k.$$

Soit pour second exemple,

$$dz = \frac{a x^2 dy - a y x\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qui est une différentielle exacte, parce que $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$. On prendra l'intégrale du premier terme par rapport à y, et l'on aura

$$\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} + X:$$

on différentiera cette intégrale par rapport à x, on aura

$$-\frac{a y x\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

on la retranchera de la valeur de N, et l'on aura

$$dX = 0,$$

et par conséquent

$$X = k:$$

donc l'intégrale demandée est

$$z = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} + k.$$

384. Les observations précédentes sur les intégrations d'une fonction à deux variables trouvent leur application dans l'intégration des différentielles secondes des fonctions d'une seule variable; car soit la différentielle seconde

$$M d^2x + N dx^2,$$

qu'il s'agit d'intégrer, M et N étant fonctions de la seule variable x; en regardant dx comme une nouvelle variable y, on aura

$$d^2x = dy;$$

donc la différentielle pourra se mettre sous la forme

$$M dy + N y dx:$$

or pour que celle-ci soit intégrable, il faut que $\frac{dM}{dx} = \frac{d(Ny)}{dy}$; et parce que M et N ne sont fonctions que de x, on aura

$$dM = N dx;$$

condition nécessaire pour que $M d^2x + N dx^2$ soit une différentielle exacte.

Si cette condition a lieu, on aura

$$\int (M d^2x + N dx^2) = M dx + k.$$

Exemple. Soit la différentielle

$$(4a^2x + 3bx^2) d^2x + (4a^2 + 6bx) dx^2,$$

qui est intégrable, parce qu'on a

$$N dx = dM:$$

son intégrale sera donc

$$(4a^2x + 3bx^2) dx + k.$$

Si on suppose la différentielle première de x constante, on aura

$$\int . N dx^n = dx \int N dx,$$

+ une constante qui pourra être fonction de dx.

385. Lorsqu'on différentie plusieurs fois de suite une même fonction de x, on suppose ordinairement que dx est constant; ainsi les différentielles des ordres supérieurs d'une fonction de x se présentent ordinairement sous la forme

$$X dx^n \ldots X dx^3 \ldots X dx^n;$$

et si on appelle y la fonction primitive, on a les équations

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X \ldots \frac{d^3 y}{dx^3} = X \ldots \frac{d^n y}{dx^n} = X:$$

or il est facile de remonter par des intégrations successives, de la fonction différentielle à la fonction primitive.

Soit la première fonction

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X, \text{ ou } \frac{d^n y}{dx} = X dx;$$

on voit facilement que $\frac{dy}{dx}$ est l'intégrale du premier membre lorsque dx est constant : on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \int . X dx + k:$$

multiplions les deux membres de cette intégrale par dx, nous aurons

$$dy = dx \int X d + k dx,$$

et intégrant de nouveau,

$$y = \int . dx \int X dx + kx + k'.$$

On peut ramener cette intégration à deux intégrales simples en intégrant par parties ; car si on suppose que l'intégrale de $\int X dx$ est P, celle de $\int dx\, XP$ sera

$$px - \int x\, dP = x \int X dx - \int X x\, dx :$$

on aura donc

$$y = x \int X dx - \int X x\, dx + kx + k'.$$

L'équation différentielle du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3} = X, \text{ ou } \frac{d^3y}{dx^2} = X dx$$

étant intégrée, donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int X dx + k ;$$

multipliant par dx, et intégrant de nouveau, on a

$$\frac{dy}{dx} = x \int X dx - \int X x\, dx + kx + k' :$$

multipliant encore par dx ; et intégrant, on a

$$y = \tfrac{1}{2}(x^2 \int X dx - 2x \int X x\, dx + \int X x^2 dx) + \frac{k}{2} x^2 + k'x + k.$$

Les trois lettres k, k', k'', sont les trois constantes arbitraires introduites par les trois intégrations.

En suivant toujours la même méthode, et intégrant par parties, on trouvera que l'intégrale de $\frac{d^4y}{dx^4} = X$ est

$$y = \frac{1}{2.3}(x^3 \int X dx - 3x^2 \int X x\, dx + 3x \int X x^2 dx - \int X x^3 dx),$$

et ainsi des autres. Revenons à l'intégration des fonctions à deux variables.

386. Lorsque les coefficiens de la fonction différentielle $M\,dy+N\,dx$ n'ont pas les conditions indiquées (382), la fonction n'est pas généralement intégrable, mais elle peut le devenir dans un grand nombre de cas par les différens rapports qui peuvent exister entre M, N, et le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Supposons que l'on ait entre ces trois quantités l'équation

$$M\frac{dy}{dx}+N=0, \text{ ou } M\,dy+N\,dx=0,$$

M et N étant des fonctions connues de x et y, ou d'une des deux variables seulement, et cherchons l'équation primitive dont celle-ci tire son origine.

Le moyen le plus simple qui s'est offert aux analystes, a été de séparer les variables; c'est-à-dire de partager l'équation en deux membres qui ne renferment l'un et l'autre qu'une variable avec sa différentielle; l'équation séparée sera de cette forme

$$X\,dx=Y\,dy,$$

X étant une fonction de x et de constantes, et Y une fonction de y et de constantes: elle sera par conséquent intégrable par les quadratures.

Soit l'équation

$$x^m dx=y^n dy:$$

la séparation est toute faite, et l'on aura en intégrant

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}=\frac{y^{n+1}}{n+1}+k.$$

Si l'on a l'équation

$$y\,dx-x\,dy=0,$$

la séparation sera très-facile à effectuer; car en divisant les deux termes par xy, on a

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0,$$

et en intégrant,

$$\log x - \log y = \log k,$$

ou en repassant des logarithmes aux quantités,

$$\frac{x}{y} = k.$$

Quoique la séparation des variables soit généralement difficile, et très-souvent impossible, on peut cependant assigner deux cas très-étendus où elle réussit. Le premier de ces cas a lieu lorsque les coefficiens de l'équation différentielle sont homogènes en x et y, ou qu'on peut les rendre tels; car si tous les termes sont d'une même dimension m en x et y, en faisant $x = yz$, ils seront tous multipliés par y^m, et par conséquent si on met l'équation différentielle sous cette forme,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{N}{M} = 0,$$

le dernier terme $\frac{N}{M}$ sera une fonction de la seule variable z; nous la représenterons par Z; l'équation deviendra donc

$$dy + Z\,dx = 0:$$

mais $dx = y\,dz + z\,dy$, donc

$$dy\,(1 + Zz) + Zy\,dz = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{y} + \frac{Z\,dz}{1 + Z\,z} = 0,$$

équation toute séparée.

Soit l'équation homogène de la dimension 1;

$$(x - ny)\,dx + y\,dy = 0:$$

en faisant $x = yz$,

on a $(z - n)y\,dx + y\,dy = 0$;

et divisant par y, $(z - n)\,dx + dy = 0$: substituant $y\,dz + z\,dy$ à la place de dx, on a

$$(z - n)y\,dz + (z^2 - nz + 1)\,dy = 0;$$

et en séparant les variables

$$\frac{dy}{y} + \frac{dz\,(z - n)}{z^2 - nz + 1} = 0:$$

équations qui s'intégreront facilement par les quadratures (553).

Soit encore l'équation homogène de la dimension 2;

$$(my^2 + nxy)\,dy + (ax^2 + by^2)\,dx = 0:$$

en faisant $x = yz$, on aura

$$(m + nz)\,dy + (az^2 + b)\,dx = 0,$$

et mettant $y\,dz + z\,dy$ pour dx, on a

$$(az^3 + (b + n)z + m)\,dy + (az^2 + b)\,y\,dz = 0,$$

ou en séparant

$$\frac{dy}{y} + \frac{(az^2 + b)\,dz}{az^3 + (b + n)z + m} = 0.$$

387. On peut encore séparer les variables dans toutes les équations comprises sous la forme suivante :

$$dy + Py\,dx = Q\,dx,$$

dans laquelle P et Q sont fonctions de la seule va-

riable x, et de constantes : on fera, selon la méthode de J. Bernoulli, $y = uX$, X étant une fonction indéterminée de x, et u une nouvelle variable introduite dans l'équation ; on aura la transformée

$$X du + u dX + u PX dx = Q dx,$$

et si on fait $udX = Q dx$, et $Xdu + upXdx = 0$, comme on en est le maître, à cause de l'indéterminée u, on aura deux équations pour déterminer X et u ; la seconde donnera

$$\frac{du}{u} = -P dx, \text{ ou } \log u = -\int P dx,$$

et en passant des logarithmes aux nombres $u = e^{-\int P dx}$, substituant cette valeur de u dans la première équation, et intégrant, on a

$$X = \int Q dx . e^{\int P dx} + k;$$

donc

$$y = uX, = e^{-\int P dx} \left(k + \int Q dx e^{\int P dx} \right) :$$

nous n'avons pas ajouté de constante dans l'intégration qui a donné la valeur de u, parce qu'elle est renfermée dans k, et que d'ailleurs la proposée n'étant que différentielle du premier ordre, son intégrale ne demande qu'une constante arbitraire.

L'équation

$$dy + Py dx = Q dx$$

est appelée *équation linéaire*, parce que la variable y et sa différentielle ne s'y trouvent qu'au premier degré ; mais son intégrale représente souvent une courbe transcendante : sa dénomination seroit plus exacte si on l'appeloit *équation du premier degré et du premier ordre.* (*Voyez* Lacroix, seconde partie, page 225.)

Nous observerons aussi que l'équation

$$y^{m-1}\,dy+P\,y^m dx=Q y^n dx$$

se ramène facilement à la précédente; car en divisant d'abord par y^n, et faisant ensuite $y^{m-n}=z$, on a

$$dz+(m-n)Pz\,dx=(m-n)\,Q\,dx.$$

Exemple. Soit l'équation

$$dy+y\,dx=a x^m dx;$$

on a ici

$$P=1,\ Q=a x^m;$$

donc

$$y=e^{-x}(k+a\int e^x x^m dx):$$

or le terme $\int e^x x^m dx$ est facile à intégrer (361), donc on aura facilement la valeur de y. Si $m=0$, $y=a+ke^{-x}$.

Les deux cas que nous venons de faire connoître sont les seuls où la séparation des variables est généralement possible; s'il se trouve quelque équation particulière qui admette la séparation, ce sera parce qu'elle pourra être ramenée à une des deux formes précédentes.

388. Il existe encore un moyen d'intégrer les équations différentielles, qui consiste à les multiplier par un facteur qui les rende des différentielles exactes. On conçoit, en effet, que si $M dy + N dx$ est la différentielle exacte d'une fonction de x et y, et que M et N aient un facteur commun, ce facteur disparoîtra dans l'équation

$$\frac{dy}{dx}+\frac{N}{M}=0;$$

en sorte que si on désigne par m le quotient de $\frac{N}{M}$, l'équation $dy+m\,dx=0$ ne sera plus une

différentielle exacte; mais elle pourra le devenir en rétablissant le facteur qui est censé avoir disparu par la division; toute la difficulté consiste à trouver le facteur. Jusqu'ici on n'a pu le trouver généralement que pour les deux cas qui admettent la séparation.

Exemple. L'équation

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

ne peut pas s'intégrer immédiatement, parce que l'équation de condition $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$ n'est pas satisfaite; mais si on multiplie l'équation proposée par le facteur $\frac{1}{y^2}$, on a

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0,$$

qui est une différentielle exacte, parce que $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$: son intégrale est visiblement

$$\frac{x}{y} = k \text{ (386)} :$$

pareillement l'équation $2x\,dy + 3y\,dx = 0$ n'est pas une différentielle exacte; mais si on la multiplie par x^2y, elle le deviendra, et son intégrale sera

$$y^2x^3 = k.$$

La méthode de rendre intégrable une équation différentielle en la multipliant par un facteur convenable, est due à Euler; mais la difficulté, ou l'impossibilité de trouver ce facteur, la rend d'un usage très-limité dans les applications du Calcul

Intégral ; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage. Nous allons terminer ces Leçons par quelques problèmes de la méthode inverse des tangentes.

389. On appelle méthode inverse des tangentes, l'intégration de toute équation différentielle du premier ordre, parce que dans l'origine des nouveaux calculs, on appela méthode directe des tangentes, la méthode de déterminer $\frac{dy}{dx}$, par la différentiation de l'équation d'une courbe (287) ; et par la même raison, on donna le nom de méthode inverse des tangentes à la méthode de remonter de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ à l'équation primitive : ainsi les problèmes suivans regardent la méthode inverse des tangentes.

Problème premier. Trouver la courbe dans laquelle la soutangente est égale à une fonction donnée de l'abscisse.

Soit X la fonction donnée de x, la formule générale des soutangentes est

$$\frac{y\,dx}{dy};$$

on aura donc l'équation

$$y\frac{dx}{dy} = X,$$

d'où on déduit

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{X},$$

et en intégrant,

$$\log y = \int \frac{dx}{X} + k.$$

Supposons 1°. que $X = 2x$, on aura

$$\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \log x;$$

si on désigne la constante k par $\log p$, on aura

$$2 . \log y = \log p x,$$

et repassant des logarithmes aux nombres,

$$y^2 = p x,$$

équation de la parabole.

2°. Si $X = \frac{a^2 - x^2}{x}$, on aura

$$\int \frac{-x\,dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2} \log a^2 - x^2 + \log k :$$

donc

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2),$$

en mettant $\frac{b^2}{a^2}$ à la place de k.

3°. Si $X = m$, on a

$$\int \frac{dx}{m} = \frac{x}{m} \ldots$$

donc $$\log y = \frac{x}{m},$$

et par conséquent

$$y = e^{\frac{x}{m}},$$

équation de la logarithmique.

Probléme second. Quelle est la courbe dont l'espace compris entre l'arc, l'ordonnée et l'abscisse, est égal aux deux tiers du rectangle de l'ordonnée par l'abscisse ?

Les conditions du problème donnent l'équation

$$\int y\,dx = \tfrac{2}{3}xy;$$

donc en différentiant,

$$y\,dx = \tfrac{2}{3}(y\,dx + x\,dy), \text{ ou } y\,dx = 2x\,dy.$$

et par conséquent

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \text{ ou } \log y^2 = \log px;$$

et enfin

$$y^2 = px.$$

Problème troisième. Quelle est la courbe dont la tangente est constante et égale une ligne donnée a?

L'expression générale de la tangente est

$$y\frac{ds}{dy} \quad (287);$$

on a donc l'équation

$$y\frac{ds}{dy} = a,$$

d'où on déduit

$$\frac{dy}{y} = \frac{ds}{a},$$

et en intégrant

$$y = k\,e^{\frac{s}{a}}:$$

ainsi cette courbe est une espèce de logarithmique, dans laquelle les arcs de la courbe désignés par s, sont les logarithmes des ordonnées correspondantes.

Si on veut avoir son équation exprimée en x et y, on mettra $\sqrt{dx^2+dy^2}$ à la place de ds, et séparant les variables, on aura

$$dx = \frac{dy}{y}\sqrt{a^2-y^2} = dy\sqrt{\frac{a^2}{y^2}-1};$$

soit $\frac{1}{y} = u$, et $dy = -\frac{du}{u^2}$:

donc

$$dx = -\frac{du}{u^2}\sqrt{a^2u^2-1};$$

faisons $\sqrt{a^2u^2-1} = z - au$, d'où on déduira les valeurs suivantes :

$$u = \frac{1+z^2}{2az};\ \frac{1}{u} = \frac{2az}{1+z^2};\ -\frac{du}{u^2} = \frac{2a(1-z^2)dz}{(1+z^2)^2};$$

$$\sqrt{a^2u^2-1} = z - au = 1 - \frac{(1-z^2)}{2z};$$

donc

$$dx = -a\frac{dz}{z}\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 = -a\left(\frac{dz}{z} - \frac{4z\,dz}{(1+z^2)^2}\right);$$

et intégrant,

$$x = K - a\log z - \frac{2a}{1+z^2}$$

$$= K - a\log(au+\sqrt{a^2u^2-1}) - \frac{1}{uz}$$

$$= K - a\log\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\sqrt{a^2-y^2}\right) - \frac{y^2}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\cdots$$

et enfin

$$x = a + \log\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}} - \frac{y^2}{a+\sqrt{a^2-y^2}}.$$

La constante K a été déterminée par cette condition que lorsque $x = 0$, $y = a$... La courbe dont nous venons de trouver l'équation est appelée *tractoire* ou *tractrice*; on peut la concevoir décrite par

un corps pesant attaché à une des extrémités d'un fil, tandis que l'autre extrémité parcourt une ligne droite, tracée sur un plan horizontal. L'origine des abscisses est au point où le mouvement commence, c'est-à-dire au point où le fil tendu est perpendiculaire sur la ligne?

Problème quatrième. Quelle est la courbe dont la surface comprise entre l'arc, l'abscisse x, et l'ordonnée y, est égale à la partie $AY'M'P$ d'un cercle dont le rayon est a, et l'abscisse $A'P$ est égale à l'ordonnée y de la courbe? Fig. 2.

L'aire de la courbe est exprimée par $\int . y\,dx$, celle du cercle le sera par $\int dy\sqrt{a^2-y^2}$; on a donc

$$\int . y\,dx = \int . dy = \sqrt{a^2-y^2},$$

d'où on déduit

$$dx = \frac{dy}{y}\sqrt{a^2-y^2},$$

qui est l'équation que nous venons d'intégrer.

Problème cinquième. Quelle est la courbe qui, tournant autour de son axe, engendre une surface égale à la surface convexe d'un cylindre dont la hauteur est égale à l'ordonnée de la courbe, et le rayon de la base égal à une ligne donnée a?

L'expression de la surface des solides de révolution est

$$2\pi \int . y\,dx \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = 2\pi \int . y\,ds;$$

celle du cylindre est

$$2\pi a y;$$

on a donc l'équation

$$y\,ds = a\,dy, \text{ et } \frac{dy}{y} = \frac{ds}{a};$$

en intégrant,

$$y = k\, e^{\frac{s}{a}},$$

même équation que ci-dessus.

Problème sixième. Quelle est la courbe dont l'arc s est égal à $\frac{3}{2}\sqrt[3]{a x^2}$?

On a

$$\int \sqrt{dx^2+dy^2} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a x^2};$$

donc $$\sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt[3]{\frac{a}{x}},$$

et $$dx^2+dy^2 = dx^2.\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\ldots$$

d'où on déduit

$$dy = x^{-\frac{1}{3}}\, dx\,(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}},$$

et parce que $\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{3}}dx$ est la différentielle $x^{\frac{2}{3}}$, on aura en intégrant

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \text{ (376)}.$$

Problème septième. Quelle est la courbe dans laquelle l'ordonnée est à la soutangente :: une ligne donnée a : à l'ordonnée diminuée de l'abscisse?

Soit x l'abscisse, y l'ordonnée, et $\frac{y\,dx}{dy}$ la soutangente : on aura

$$y : \frac{ydx}{dy} :: a : y - x, \text{ ou } dy : dx :: a : y - x :$$

donc

$$a\,dx = y\,dy - x\,dy, \text{ et } a\,dx + x\,dy = y\,dy :$$

en la comparant à $dy + Py\,dx = Q\,dx$, on aura,

en mettant y à la place de x, et x à la place de y;

$$P=\frac{1}{a},\ Q=\frac{y}{a};$$

donc

$$x=e^{-\frac{y}{a}}\left(k+\int e^{\frac{y}{a}}y\frac{dy}{a}\right)=y-a+ke^{-\frac{y}{a}}\ldots$$

Ce problême est un des premiers qui ont été résolus par la méthode inverse des tangentes; il fut proposé par de Beaune aux géomètres de son temps. Jacques Bernoulli l'énonça d'une manière plus générale. (*Voyez* Lacroix, Calcul Intégral, p. 298, et les Leçons de Marie, p. 473, probl. 6.)

Problême huitième. Démontrer par le Calcul Différentiel et Intégral le théorême du n°. 176; savoir que dans l'ellipse la somme des quarrés des diamètres conjugués est une quantité constante.

Il a été démontré (175) que le triangle $P'CP$ est égal en surface au triangle $R'CR$; donc si des points P' et R', on abaisse les deux perpendiculaires $P'm$, $R'n$, sur CP prolongé et sur CR, on aura

$$CP\times P'm=CR\times Rn.$$

Soient les deux diamètres conjugués $CR=f$, $CP=g$: les perpendiculaires $R'n=x$, $P'm=z$, les diamètres CR', CP' infiniment près des premiers $=f-df$, $g+dg$, on aura donc

$$g\times z=f\times x;$$

mais d'un autre côté l'angle $P'Pm=RCP$, et $R'Rn=$ aussi RCP, donc

$$\frac{P'm}{Pm}=\frac{R'n}{Rn},\text{ ou }\frac{z}{dg}=\frac{x}{-df},$$

et par conséquent

$$z = \frac{x\,dg}{-df}.$$

Cette valeur substituée à la place de z, donnera

$$fx = \frac{g\,dg\,x}{-df}, \text{ ou } -f\,df = g\,dg,$$

et par conséquent

$$g\,dg + f\,df = 0,$$

ou en intégrant,

$$g^2 + f^2 = k;$$

ce qu'il falloit démontrer.

Si l'on prend pour diamètres conjugués le grand axe et le petit axe, on aura

$$b^2 + a^2 = k;$$

donc $f^2 + g^2 = a^2 + b^2$ (176).

On démontreroit par un calcul semblable, que dans l'hyperbole la différence des quarrés des diamètres conjugués est constante.

ADDITION.

Problèmes relatifs à la Trigonométrie sphérique.

On trouve dans la Géométrie de Legendre une solution simple et élégante de ces deux problèmes: celle qui suit servira d'exemple pour appliquer le Calcul Différentiel à ces sortes de questions.

Problème premier.

De tous les triangles sphériques formés avec deux côtés donnés a, b, et un troisième c, à volonté, déterminer celui qui aura la plus grande surface.

Solution. La surface d'un triangle sphérique quelconque a pour mesure l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles droits; c'est-à-dire que l'on a $S = (A+B+C-\pi)$, en faisant le rayon $= 1$. (*Géom.* 309.)

Mais si l'on veut faire entrer les côtés a, b dans l'expression de la surface, on aura, par une des analogies connues de Nepper

$$\text{tang}\frac{A+B}{2} : \cot\frac{C}{2} :: \cos\frac{a-b}{2} : \cos\frac{a+b}{2},$$

ce qui donne

$$\text{tang}\frac{A+B}{2} = \cot\frac{C}{2} \times \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \quad \ldots\ldots (1)$$

d'un autre côté on a

$$\tang\left(\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}\right),$$

ou $$\cot S=\frac{\tang\frac{A+B}{2}+\tang\frac{C}{2}}{1-\tang\frac{A+B}{2}\tang\frac{C}{2}};$$

substituant dans cette expression celle de $\tang\frac{A+B}{2}$, et réduisant, on aura

$$-\cot S=\frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos C}{\sin C};$$

en différentiant cette formule, et faisant $\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}$ constant, et $\sin C$, $\cos C$ variables, on a

$$\frac{d.S}{d.C\sin^2 S}=-\frac{(\sin^2 C+\cos^2 C)-\cos C\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}}{\sin^2 C}=0,$$

d'où on déduit

$$\cos C=-\frac{1}{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}}=-\tang\frac{a}{2}\tang\frac{b}{2}.$$

Cette dernière équation conduit aux deux suivantes:

$$1+\cos C=1-\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}.$$

$$1-\cos C=1+\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}};$$

et par conséquent

$$\frac{1-\cos C}{1+\cos C},\text{ ou }\operatorname{tang}^2\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}.$$

Cette valeur substituée dans l'équation (1). donne

$$\operatorname{tang}\frac{C}{2}\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}=\operatorname{tang}^2.\frac{C}{2};$$

donc $$A+B=C;$$

c'est-à-dire que dans tous les triangles sphériques qui ont deux côtés donnés a et b, et le troisième à volonté, le plus grand est celui dans lequel l'angle C compris entre les deux côtés donnés, est égal à la somme des deux autres A et B. (*Voyez* Géométrie de Legendre, p. 254-57, *troisième édit.*)

Probléme second.

Soient a, b, deux côtés donnés d'un triangle sphérique très-peu différent de 90^d; on propose de déterminer l'angle C compris entre ces deux côtés, par le moyen des trois a, b, c.

Si les deux côtés a et b étoient exactement de 90^d, l'angle C seroit mesuré par l'arc c: donc a et b différant très-peu de 90°, l'angle C aura pour mesure un arc très-peu différent de c. Soit le côté $a=90\pm\alpha$, le côté $b=90\pm\beta$, et l'angle $C=c\pm x$;

α et β étant deux arcs très-petits, de deux ou trois degrés au plus.

On a par les formules connues de la Trigonométrie sphérique,

$$\cos(c+x) = \frac{\cos c - \cos(90+\alpha)\cos(90+\beta)}{\sin(90+\alpha).\sin(90+\beta)}$$

$$= \frac{\cos c - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} = \frac{\cos c}{\cos\alpha\cos\beta} - \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\beta.$$

Servons-nous de la formule du (n° 97) pour développer le premier membre de cette fonction selon les puissances de x, et le second selon les puissances de α et β.

Nous observerons 1°. que x, α, β étant des quantités très-petites, nous pourrons ne prendre que les fonctions primes et secondes; 2°. que x étant du second ordre par rapport à α et β, en ne poussant le développement que jusqu'à la fonction prime du premier membre, il faudra développer jusqu'à la fonction seconde du second membre.

Remarquons encore que x, α, β devant être supposés zéro dans les fonctions dérivées, les termes multipliés par $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\text{tang}\,\alpha$, $\text{tang}\,\beta$, s'évanouiront. Cela posé,

Le premier membre développé jusqu'à la fonction prime deviendra

$$\cos c - x\sin c.$$

Dans le second membre, $F(\alpha,\beta)$ se réduira à $\cos c$, et l'on aura ensuite

$$\alpha F'(\alpha,\beta) = \alpha\left(\frac{\cos c\sin\alpha}{\cos^2\alpha\cos\beta} - \frac{\text{tang}\,\beta}{\cos^2\alpha}\right) = 0,$$

$$\beta F_1(\alpha,\beta) = \beta\left(\frac{\cos c\sin\beta}{\cos^2\beta\cos\alpha} - \frac{\text{tang}\,\alpha}{\cos^2\beta}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{2}F''(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^2}{2}\cos c,$$

$$\frac{\beta^2}{2}F_{11}(\alpha,\beta)=\frac{\beta^2}{2}\cos c,$$

$$\alpha\beta F_1(\alpha,\beta)=-\alpha\beta.$$

On aura donc

$$x=\frac{\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cos c}{\sin c}$$

$$=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\left(\frac{1-\cos c}{\sin c}\right)-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos c}{\sin c}\right)$$

$$=p^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c-q^2\cot\tfrac{1}{2}c,$$

en faisant $\frac{\alpha+\beta}{2}=p$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=q$. (*Géométrie de Legendre, p. 462, troisième édit.*)

FIN.

A PARIS, DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

TABLE.

Analyse infinitésimale, page 5
Méthode des différences, 6
Calcul direct des différences, *ibid.*
Différences premières des fonctions algébriques, 7
Différences premières des fonctions d'une seule variable, composées de facteurs en progression arithmétique, 12
Différences secondes et troisièmes des fonctions algébriques, 17
Différences des fonctions transcendantes, 22
Calcul inverse des différences, 26
Intégration et sommation des fonctions entières et rationnelles d'une variable, 29
Constante arbitraire à ajouter dans l'intégration et sommation, 33
Intégration et sommation des fonctions exponentielles, 39
Application des principes précédens, aux séries des nombres figurés, 41

Calcul différentiel.

Notions générales, 49
Règles pour différentier toutes sortes de quantités, 52
Différentielles secondes, et des ordres supérieurs, 61
Différentiation des fonctions transcendantes, 66
Logarithmiques, *ibid.*
Exponentielles, 71
Circulaires, sinus, cosinus, &c. 72
Application du calcul différentiel à la solution du problême des tangentes, 77
Observations générales sur les principes du calcul différentiel, 83
Méthode des limites, 84
Observations générales sur la méthode des limites, 95
Théorie des fonctions analytiques, 100
Manière de représenter graphiquement les coefficiens différentiels, 110
Application des méthodes précédentes à la géométrie, 112
Différens ordres d'osculation des lignes courbes, 113
Théorie des développées, 123
Des maxima et des minima dans les courbes, 129

Des caractères qui distinguent les maxima des minima, 142
Application du calcul différentiel à la détermination des points doubles, d'inflexion, de rebroussement, 152
Remarque générale, 166
Usage analytique du calcul différentiel, 167
Application du calcul différentiel à la théorie générale des équations, 171
Démonstration de la règle de Descartes, 175
Méthode pour déterminer les racines égales, 182
Méthodes pour déterminer les racines par approximation, 184
Théorême relatif à la somme des puissances des racines d'une équation, 187
Formule pour déterminer la somme des puissances du degré *n*, sans avoir besoin de la somme des puissances inférieures des mêmes racines, 191
Méthode pour déterminer, par le calcul différentiel, la valeur d'une fonction fractionnaire, lorsque pour une valeur particulière de la variable, le numérateur et le dénominateur deviennent zéro, chacun séparément, 193
Usage du calcul différentiel, pour résoudre une fraction rationnelle en fractions simples, 198

Calcul intégral.

Notions générales, 212
De l'intégration des quantités différentielles qui n'ont qu'une variable, 213
Intégration des quantités monomes, 216
Intégration des quantités binomes, 219
Intégration des fractions rationnelles, 224
Méthode pour ramener une différentielle proposée à quelqu'autre différentielle que l'on sache intégrer, 237
Méthodes pour intégrer par approximation les formules qui ne peuvent l'être en rigueur, 245
Intégration des fonctions différentielles qui renferment des logarithmes ou des exponentielles, 250
Intégration des fonctions différentielles qui renferment des arcs de cercle, des sinus, des cosinus, des tangentes, &c. 256
Application des méthodes précédentes, aux quadratures, aux rectifications, à la recherche des surfaces des solides, de révolution, et des solidités, 270
De la rectification des courbes, 283

Des surfaces courbes des solides de révolution, 293
De la cubature des solides de révolution, 299
De l'intégration des différentielles à plusieurs variables, 302
De l'intégration des équations différentielles en les multipliant par un facteur qui les rende des différentielles exactes, 316
De la méthode inverse des tangentes, 318

Addition.

Problêmes relatifs à la Trigonométrie sphérique, 326

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

Page 16, ligne 20, $N = \frac{b-a}{-1}$; *lisez* $\frac{-1}{b-a}$.

Page 31, ligne 20, $\Sigma.3$; *lisez* $\Sigma.x$.

Page 36, dans le n°. 266, par-tout où il y a n au dénominateur, *lisez* $n+1$. (essentielle.)

Page 57, ligne 27, $a\,d.\left(\frac{b-y}{y}\right)$; *lisez* $a.d.\left(\frac{y}{b-y}\right)$.

Page 60, ligne 8, $b\,dx$; *lisez* $b\,\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Page 71, ligne 23, $\log y = \log X$; *lisez* $= x \log X$.

Page 74, ligne 11, $-\frac{\sin^2 x}{dx}$; *lisez* $-\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Page 97, ligne 15, de la continuité; *lisez* de continuité.

Page 98, ligne 21, *lisez* $\frac{0}{0} = 5^x$.

Page 106, ligne 14, $(y-a)^2 a =$; *lisez* $(y-b)^2 a =$.

Page 107, ligne 22, effacez le signe $=$ entre les deux termes, et mettez une virgule.

Page 129, ligne 4, $-\sin\frac{L\,O}{a}$; *lisez* $= \sin\frac{L\,O}{a}$.

Page *ibid.* ligne 5, q — &c. *lisez* $q =$.

Page 132, ligne 14, d'abscisses rentrantes; *lisez* d'abscisses, dans les courbes rentrantes.

Page 140, ligne 14, $\sin\phi = \frac{a}{4b} \pm \ldots$ *lisez* $-\frac{a}{4b} \pm \ldots$

Page 157, ligne 6, $d.\frac{dy}{dx} = -$; *lisez* $\frac{dy}{dx} = -$ &c.

Page 168, ligne 30, $n\,\frac{dx}{x}$; *lisez* $n\,\frac{dX}{X}$.

Page 173, ligne 10, $+2\,s\,x$; *lisez* $+2^n S\,x$

Page *ibid.* ligne dernière, même faute.

Page 174, ligne 8, B, C, D; *lisez* B, c, F.

Page 177, ligne 29, $x + \frac{2P}{n}x$; *lisez* $x^a + \ldots$

Page 191, ligne 10, $+ \frac{d^2\phi}{dy^2}$; *lisez* $X\frac{d^2\phi}{dy^2}$.

Page *ibid.* ligne 10, $+ \frac{d^3\phi}{dy^3}$; *lisez* $\frac{d^3\phi}{dy^3}$.

Page 192, ligne 16, $7+$; *lisez* $1+$.

Page 202, ligne 19, $-A(p+qx)$; *lisez* $-A-$, &c.

Page 204, ligne 4, $p=1$, $q=-1$; *lisez* $p=-1, q=+1$.

Page 205, ligne 2, *déterminer*; *lisez* on *déterminera*.

Page 206, ligne dernière, 3ϕ; *lisez* $\sin 3\phi$.

Page 212, ligne 14, de la limite *au* dernier rapport; *lisez ou* dernier rapport.

Page 224, ligne 2, $-\frac{1}{2a^2}X^{-\frac{1}{3}}$; *lisez* $X^{-\frac{2}{3}}$.

Page *ibid.* ligne 4, $\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}X$; *lisez* $\left(1+\frac{a}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}X$.

Page 228, ligne 10, *lisez* $\log(x+p\pm q\sqrt{-1}) = \log r + \log(\ldots.)$

Page 237, ligne 7, $x^r(z+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$; *lisez* $x^r(a+b\ldots)$

Page 238, ligne 14, si $m > \alpha$; *lisez* $< \alpha$.

Page 259, ligne 9, $+\frac{n-1}{1}\int.d\varphi$; *lisez* $+\frac{n-1}{n}\int\ldots$

N. B. *Le Cours de Mathématiques de P. Tédenat est composé ainsi qu'il suit :*

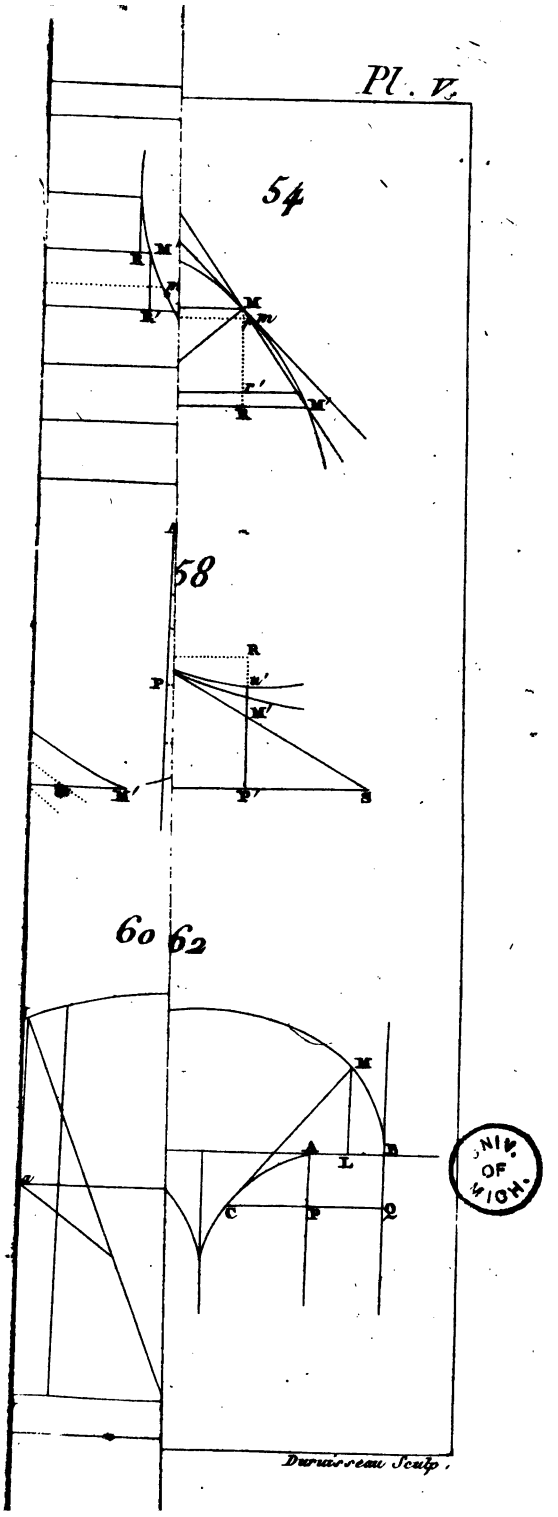
I. Leçons Elémentaires d'Arithmétique et d'Algèbre, 1 vol. *in*-8. 4 fr.

II. Leçons Elémentaires de Géométrie et de Trigonométrie, 1 vol. *in*-8. avec 10 planches, 5 fr.

III et IV. Leçons Elémentaires de Mathématiques, 2e part. contenant un Supplément aux Elémens d'Algèbre, l'application de l'Algèbre à la Géométrie, et les principes du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, 2 vol. *in*-8. avec 6 planches, 8 fr.

Ces deux derniers volumes ne se vendent pas séparément.

Pl. V.

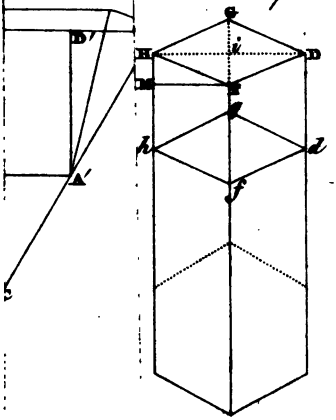


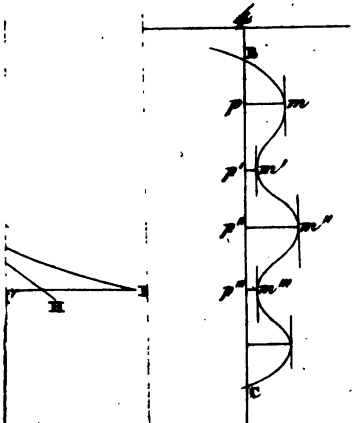
UNIV. OF WISH.

Pl. VI

65

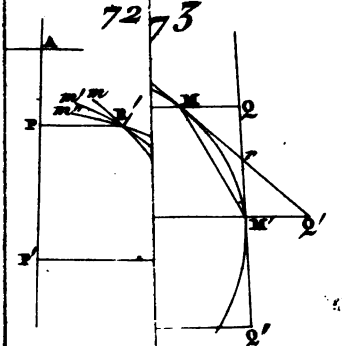
67





72

73



Duvidsreau Sculp.